Анализ и управление в нестационарной модели сложного теплообмена

Магистерская диссертация

Гренкин Г.В., группа М8203

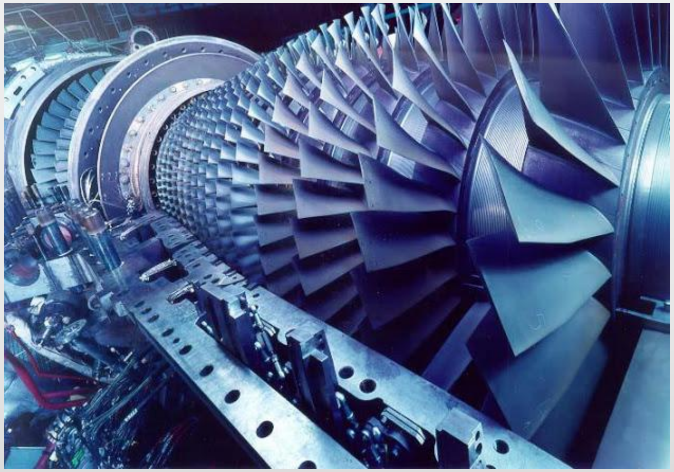
Научный руководитель

Чеботарев А.Ю., профессор, д.ф.-м.н.

Владивосток, 2015

Сложный теплообмен

- Кондуктивный, конвективный, радиационный переносы тепла
- Инженерные приложения



газовые турбины

охлаждение стекла

Предыдущие исследования
(диффузионные модели)

- Стационарные модели: А.Е. Ковтанюк, А.Ю. Чеботарев и др.
  - однозначная разрешимость
  - задача о свободной конвекции с радиационным теплообменом
  - оптимальное управление граничным коэффициентом
- Полустационарные модели: R. Pinnau, O. Tse и др.
  - однозначная разрешимость
  - задача о свободной конвекции в R^2
  - оптимальное управление граничной температурой
- Нестационарная модель: настоящая работа
  - однозначная разрешимость
  - устойчивость стационарных решений
  - разрешимость задачи о свободной конвекции в R^3
  - оптимальное управление граничным коэффициентом

Глава 1. Вывод модели сложного теплообмена

Радиационный теплообмен

- Уравнение переноса излучения:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I(x,\omega,t)}{\partial t} + \omega\cdot\nabla_x I(x,\omega,t) + \kappa I(x,\omega,t) =$$
$$= \frac{\kappa_s}{4\pi}\int\limits_S P(\omega,\omega')I(x,\omega',t)d\omega' + \kappa_a\frac{\sigma n^2 T^4(x,t)}{\pi}.$$

$\omega \in S$ - направления лучей, $S = \{\omega \in \mathbb{R}^3 \colon |\omega| = 1\}$ - единичная сфера

$I(x,\omega,t)$ - интенсивность излучения, $T(x,t)$ - температура,

$P(\omega,\omega')$ - фазовая функция рассеяния, $\kappa = \kappa_a + \kappa_s$

κ_a - коэффициент поглощения, κ_s - коэффициент рассеяния

- P_1 приближение
- Считаем, что κ_a, κ_s не зависят от частоты излучения

Диффузионное P_1 приближение

- Линейное приближение для интенсивности излучения и фазовой функции:

$$I(x,\omega,t) = \frac{\sigma n^2 T_{\max}^4}{\pi}(\varphi(x,t) + \omega \cdot \mathbf{\Phi}(x,t)),$$

$$P(\omega,\omega') = 1 + A\omega\cdot\omega', \quad T(x,t) = T_{\max}\theta(x,t)$$

φ – нормализованная интенсивность, усредненная по всем направлениям

θ – нормализованная температура, $A \in [-1,1]$ - анизотропия рассеяния

- Условия применения P_1 приближения:
  - преобладание рассеяния, малая анизотропия: $\kappa_a \ll \kappa_s(1 - A/3)$
  - оптически толстая среда: $\dfrac{1}{\kappa_{\text{ref}} x_{\text{ref}}} \ll 1$
  - удаление от границ области
- Предположим, что выполняется закон Фика:

$$\mathbf{\Phi} = -3\alpha\nabla\varphi, \quad \alpha = \frac{1}{3\kappa - A\kappa_s}$$

Диффузионное P_1 приближение

- Уравнение для интенсивности излучения:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha \Delta \varphi + \kappa_a(\varphi - \theta^4) = 0$$

- Получим уравнение для температуры

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - k\Delta T + \rho c_p \mathbf{v} \cdot \nabla T = -\kappa_a \left(4\sigma n^2 T^4 - \int_S I d\omega\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S I d\omega$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a\left(\theta^4 - \varphi\right) = \frac{b}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

- Отбросим $\frac{b}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}$:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a\left(\theta^4 - \varphi\right) = 0$$

- В дальнейшем заменим θ^4 на $|\theta|\theta^3$ (физически эквивалентно), чтобы мы могли получить оценки решения

Модель сложного теплообмена

- Уравнение для интенсивности излучения:

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha \Delta \varphi + \kappa_a (\varphi - |\theta|\theta^3) = 0, \quad \mu = 1/c$$

- Уравнение для температуры:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a \left(|\theta|\theta^3 - \varphi\right) = 0$$

- Граничные условия:

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4) = 0, \quad a\frac{\partial \theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b) = 0$$

- Начальные условия:

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0$$

Глава 3. Существование и единственность решения

3.1. Сложный теплообмен с заданным полем скоростей

Условия на исходные данные

- (i) $\mathbf{v} \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)), \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$
- (ii) $0 \le \theta_b \in L^\infty(\Sigma), \quad \beta,\gamma \in L^\infty(\Gamma)$

  $\beta \ge \beta_0 > 0,\ \gamma \ge \gamma_0 > 0,\ \beta_0,\gamma_0 = \mathrm{Const}$
- (iii) $0 \le \theta_0, \varphi_0 \in L^\infty(\Omega)$
- (iv) $\beta + \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \ge 0$

  на части $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$, где $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n} < 0$

  (малая скорость втекания по сравнению с β)

Слабая формулировка

- $V = H^1(\Omega), \quad H = L^2(\Omega)$
- Введем пространство $W = \{y \in L^2(0,T;V) \colon y' \in L^2(0,T,V')\}$
- Пара $\{\theta, \varphi\} \in W \times W$ – *слабое решение*, если

$$\theta' + A_1\theta + B(t)\theta + b\kappa_a\left(|\theta|\theta^3 - \varphi\right) = f_1 \text{ п.в. на } (0,T),$$

$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a\left(\varphi - |\theta|\theta^3\right) = f_2 \text{ п.в. на } (0,T),$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0.$$

- Операторы и функционалы:

$$(A_1\theta, v) = a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_\Gamma \beta\theta v d\Gamma,$$

$$(A_2\varphi, v) = \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_\Gamma \gamma\varphi v d\Gamma, \quad (B(t)\theta, v) = (\mathbf{v}\nabla\theta, v),$$

$$(f_1, v) = \int\limits_\Gamma \beta\theta_b v d\Gamma, \quad (f_2, v) = \int\limits_\Gamma \gamma\theta_b^4 v d\Gamma \quad \forall v \in V$$

Априорные оценки

- **Теорема 3.1.** Пусть выполняются условия (i)–(iv). Тогда любое слабое решение удовлетворяет неравенствам
$$0 \le \theta \le M, \quad 0 \le \varphi \le M^4,$$
где $M = \max\left\{\|\theta_b\|_{L^\infty(\Sigma)}, \|\theta_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \|\varphi_0\|^{1/4}_{L^\infty(\Omega)}\right\}$.
- *Доказательство.*
- Умножим уравнения на тестовые функции:

$$\theta' + A_1\theta + B(t)\theta + b\kappa_a\left(|\theta|\theta^3 - \varphi\right) = f_1 \quad \Big| \cdot \ \eta = \max\{\theta - M, 0\}$$

$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a\left(\varphi - |\theta|\theta^3\right) = f_2 \quad \Big| \cdot \ \psi = \begin{cases} \varphi^{1/4} - M, & \varphi > M^4, \\ 0, & \varphi \le M^4 \end{cases}$$

- После отбрасывания неотрицательных слагаемых:

$$\frac{1}{2}\|\eta(t)\|^2 + b\kappa_a \int\limits_0^t \int\limits_{\theta>M,\ \varphi>M^4} \left(\theta^4 - \varphi\right)(\theta - M)dxd\tau \le 0$$

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\varphi>M^4,\ \theta>M} \left(\varphi - \theta^4\right)\left(\varphi^{1/4} - M\right)dxd\tau \le 0$$

- Сложим неравенства:

$$\frac{1}{2}\|\eta(t)\|^2 + b\kappa_a \int\limits_0^t \int\limits_{\theta>M,\ \varphi>M^4} \left(\theta^4 - \varphi\right)\left(\theta - \varphi^{1/4}\right)dxd\tau \le 0$$

- Второе слагаемое неотрицательно, поэтому

$$\eta = 0 \;\Rightarrow\; \theta \le M \quad \text{п.в. в } Q$$

- Аналогично

$$\varphi \le M^4 \quad \text{п.в. в } Q$$

Существование решения

- **Теорема 3.3.** Пусть выполняются условия (i)–(iv). Тогда на любом интервале $(0, T)$ задача имеет по крайней мере одно решение.

- *Доказательство.*
- Вначале докажем локальную по времени разрешимость на $(0, T_1)$ с помощью принципа сжимающих отображений
- Априорные оценки не зависят от T_1, поэтому решение можно продолжить на весь интервал $(0, T)$

- Определим множество

$$K = \{\{\theta, \varphi\} \in C([0, T_1]; H) \times C([0, T_1]; H) : |\theta| \le M_1, |\varphi| \le M_1^4\}$$

- Введем оператор $S\colon K \to C([0, T_1]; H) \times C([0, T_1]; H)$:

$\{\widehat{\theta}, \widehat{\varphi}\} = S(\theta, \varphi)$, где $\{\widehat{\theta}, \widehat{\varphi}\}$ – решения линейных задач

$$\widehat{\theta}' + A_1\widehat{\theta} + B(t)\widehat{\theta} = f_1 - b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi), \quad \widehat{\theta}(0) = \theta_0,$$

$$\mu\widehat{\varphi}' + A_2\widehat{\varphi} = f_2 - \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3), \quad \widehat{\varphi}(0) = \varphi_0$$

- Любая неподвижная точка S – решение исходной задачи

- $S(K) \subset K$ и S – сжатие, если T_1 мало.
- По принципу сжимающих отображений оператор S имеет неподвижную точку

Единственность решения

- **Теорема 3.4.** Пусть выполняются условия (i)–(iv). Тогда решение задачи единственно.
- *Доказательство.*
- Пусть $\{\theta_1, \varphi_1\}, \{\theta_2, \varphi_2\}$ – слабые решения
- Положим $\theta = \theta_1 - \theta_2,\ \varphi = \varphi_1 - \varphi_2,\ f = (\theta_1 + \theta_2)\,(\theta_1^2 + \theta_2^2)$

$$\theta' + A_1\theta + B(t)\theta + b\kappa_a\,(f\theta - \varphi) = 0, \quad \Big|\ \cdot\ \theta$$

$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a\,(\varphi - f\theta) = 0, \quad \{\theta, \varphi\}|_{t=0} = 0 \quad \Big|\ \cdot\ \varphi$$

- Получим

$$\|\theta(t)\|^2 + \|\varphi(t)\|^2 \le C \int\limits_0^t \left(\|\theta(\tau)\|^2 + \|\varphi(\tau)\|^2\right) d\tau$$

- По лемме Гроноулла

$$\theta = 0, \quad \varphi = 0$$

Глава 3. Существование и единственность решения

3.2. Задача о свободной конвекции

Задача о свободной конвекции

- Уравнения Буссинеска:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \beta_0 \theta \mathrm{g} = -\nabla p, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

$$\mathbf{v}|_\Gamma = 0, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0$$

- Модель сложного теплообмена:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - a\Delta\theta + \mathbf{v} \cdot \nabla\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0,$$

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \alpha \Delta \varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0,$$

$$a \frac{\partial \theta}{\partial n} + \beta(\theta - \theta_b)\Big|_\Gamma = 0, \quad \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \gamma(\varphi - \theta_b^4)\Big|_\Gamma = 0,$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0$$

Условия на исходные данные

- (i) $0 \leq \theta_b \in L^\infty(\Sigma), \quad \beta, \gamma \in L^\infty(\Gamma)$

  $\beta \geq \beta_0 > 0, \ \gamma \geq \gamma_0 > 0, \ \beta_0, \gamma_0 = \mathrm{Const}$

- (ii) $0 \leq \theta_0, \varphi_0 \in L^\infty(\Omega)$

- (iii) $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{H}_0$

- Пространства:

$H = L^2(\Omega)$, $V = H^1(\Omega)$, $\mathcal{V} = \{\mathbf{w} \in \mathcal{D}(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{w} = 0\}$

$\mathbf{H}_0$ – замыкание $\mathcal{V}$ в $\mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{V}_0 = \{\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) : \operatorname{div} \mathbf{w} = 0\}$

$$W = \{y \in L^2(0, T; V) : y' \in L^2(0, T; V')\},$$

$$\mathbf{W}_1 = \{\mathbf{w} \in L^2(0, T; \mathbf{V}_0) : \mathbf{w}' \in L^1(0, T; \mathbf{V}_0')\}$$

Слабая формулировка

- Тройка $\{\theta, \varphi, \mathbf{v}\} \in W \times W \times \mathbf{W}_1$ – *слабое решение*, если

$$\theta' + A_1\theta + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = f_1 \ \text{ п.в. на } (0,T),$$
$$\mu\varphi' + A_2\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = f_2 \ \text{ п.в. на } (0,T),$$
$$\mathbf{v}' + \nu A\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \beta_0\theta\mathbf{g} = 0 \quad \text{п.в. на } (0,T),$$
$$\theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0$$

- Операторы и функционалы:

$$(A_1\theta, v) = a(\nabla\theta, \nabla v) + \int_\Gamma \beta\theta v d\Gamma, \quad (A_2\varphi, v) = \alpha(\nabla\varphi, \nabla v) + \int_\Gamma \gamma\varphi v d\Gamma,$$
$$(A\mathbf{v}, \mathbf{w}) = (\nabla\mathbf{v}, \nabla\mathbf{w}),$$
$$(f_1, v) = \int_\Gamma \beta\theta_b v d\Gamma, \quad (f_2, v) = \int_\Gamma \gamma\theta_b^4 v d\Gamma$$

Существование решения

- **Теорема 3.5.** Пусть выполняются условия (i)–(iii). Тогда задача имеет решение.
- *Доказательство.*
- Применим метод Галёркина
- Базис $\{\mathbf{w}_i\}$ в $\mathbf{V}_0$ – собственные функции оператора Стокса
- Приближённое решение: $\mathbf{v}_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ni}(t)\mathbf{w}_i$

(1) $(\mathbf{v}'_n, \mathbf{w}_i) + \nu(\nabla \mathbf{v}_n, \nabla \mathbf{w}_i) + ((\mathbf{v}_n \cdot \nabla)\mathbf{v}_n + \beta_0 \theta_n \mathbf{g}, \mathbf{w}_i) = 0, \quad i = \overline{1, n},$

(2) $\mathbf{v}_n(0) = \mathbf{v}_{n0} \equiv \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v}_0, \mathbf{w}_i)\mathbf{w}_i$

- Локальная разрешимость задачи (1)–(2): задача Коши с вольтерровым оператором, удовлетворяющим локальному условию Липшица

- Априорные оценки:

$$\|\mathbf{v}_n\|_{L^\infty(0,T;\mathbf{H}_0)} \le C_3, \quad \|\mathbf{v}_n\|_{L^2(0,T;\mathbf{V}_0)} \le C_4$$

- Оценка равностепенной непрерывности:

$$\int_0^{T-h} \|\mathbf{v}_n(t+h) - \mathbf{v}_n(t)\|^2 dt \le C\sqrt{h}$$

- Дискретное решение можно продолжить на $(0,T)$
- Предельный переход по *n*

$$\mathbf{v}_n \to \mathbf{v} \text{ сильно в } L^2(0,T;\mathbf{H}_0)$$

$$\mathbf{v}_n \rightharpoonup \mathbf{v} \text{ $*$-слабо в } L^\infty(0,T;\mathbf{H}_0), \text{ слабо в } L^2(0,T;\mathbf{V}_0)$$

- В пределе получим решение задачи

Единственность решения

- (iii′) $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{V}_0$; (iv) $\Gamma \in C^2$

- **Теорема 3.5.** Пусть выполняются условия (i), (ii), (iii′), (iv). Тогда если $T < \dfrac{\nu^3}{2C_2k^2}$, где

$$C_2 = \frac{27C_1^4}{2}, \quad C_3 = 2\beta_0^2|\mathbf{g}|^2M^2|\Omega|, \quad k = \max\left\{\frac{C_3}{\nu^2\lambda_1}, \|\nabla\mathbf{v}_0\|^2\right\},$$

то существует решение задачи, принадлежащее $L^\infty(0,T;\mathbf{V}_0)$. В указанном классе решение единственно.

Глава 4. Устойчивость стационарных решений

4.1. Условная асимптотическая устойчивость

Устойчивость стационарных решений

- Пусть $\{\theta_s, \varphi_s\}$ – стационарное решение, $\zeta = \theta - \theta_s,\ \xi = \varphi - \varphi_s$

$$\zeta' + A_1\zeta + B\zeta + b\kappa_a(g(\zeta,x) - \xi) = 0, \quad \Big| \cdot \zeta$$

$$\mu\xi' + A_2\xi + \kappa_a(\xi - g(\zeta,x)) = 0, \quad \Big| \cdot \xi$$

$$\zeta|_{t=0} = \zeta_0 = \theta_0 - \theta_s, \quad \xi|_{t=0} = \xi_0 = \varphi_0 - \varphi_s$$

  Здесь $g(\zeta,x) = (\zeta + \theta_s(x))^4 - \theta_s^4(x)$

- $$f_0\frac{d}{dt}\|\zeta\|^2 + \mu b\frac{d}{dt}\|\xi\|^2 + 2f_0\big((1-\rho)k_1 - b\kappa_a C_1\big)\|\zeta\|^2 + 2b\left(k_2 - \kappa_a C_2\right)\|\xi\|^2 +$$
$$+2b\kappa_a\int\limits_\Omega \big(f_0C_1\zeta^2 + C_2\xi^2 + (f\zeta - \xi)(f_0\zeta - \xi)\big)\,dx \le C\left(\|\zeta\|^6 + \|\zeta\|^2\|\xi\|^4\right)$$

- В случае неотрицательности интеграла

$$p'(t) + 2k_4p(t) \le k_5p^3(t)\,, \qquad p(t) = f_0\|\zeta(t)\|^2 + \mu b\|\xi(t)\|^2$$

$$p(t) \le p(0)e^{-k_4t}, \quad \text{если} \quad p^2(0) < k_4/k_5$$

Устойчивость стационарных решений

- Условие неотрицательности интеграла – малый разброс значений стационарного поля θ_s
- **Теорема 4.2.** Пусть выполняются условия (i)–(iv), $0 \le M_1 \le 4\theta_s^3 \le M_2$, $M_2 - M_1 < \frac{4}{\kappa_a}\left(k_2 M_1 + \frac{k_1 k_2}{b\kappa_a} + \frac{k_1}{b}\right)$,

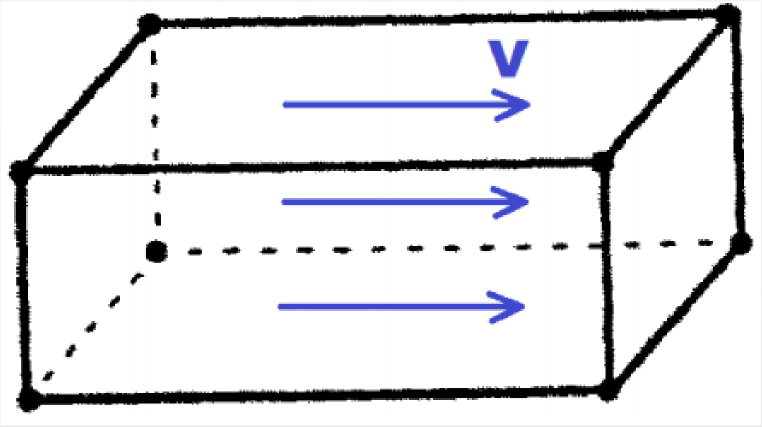
  $f_0\|\theta_0 - \theta_s\|^2 + \mu b\|\varphi_0 - \varphi_s\|^2 < (k_4/k_5)^{1/2}$.

  Тогда решение асимптотически устойчиво:

$$f_0\|\theta - \theta_s\|^2 + \mu b\|\varphi - \varphi_s\|^2 \le \left(f_0\|\theta_0 - \theta_s\|^2 + \mu b\|\varphi_0 - \varphi_s\|^2\right) e^{-k_4 t}$$

Движение среды в канале

- Выполнение достаточного условия устойчивости обеспечивается за счет большой скорости движения среды



Глава 4. Устойчивость стационарных решений

4.2. Безусловная не асимптотическая устойчивость

Устойчивость по Ляпунову

- (iv′) $0 \le \theta_0, \varphi_0 \in L^\infty(\Omega) \cap V$
- **Теорема 4.3.** Пусть выполняются условия (i)–(iii), (iv′). Тогда

$$\int_\Omega |\zeta(t)|dx + b\mu \int_\Omega |\xi(t)|dx \le \int_\Omega |\zeta_0|dx + b\mu \int_\Omega |\xi_0|dx, \quad t > 0$$

- *Идея доказательства.*

$$\zeta' + A_1\zeta + B\zeta + b\kappa_a(g(\zeta,x) - \xi) = 0, \quad \Big| \cdot \operatorname{sign}\zeta$$

$$\mu\xi' + A_2\xi + \kappa_a(\xi - g(\zeta,x)) = 0 \quad \Big| \cdot \operatorname{sign}\xi$$

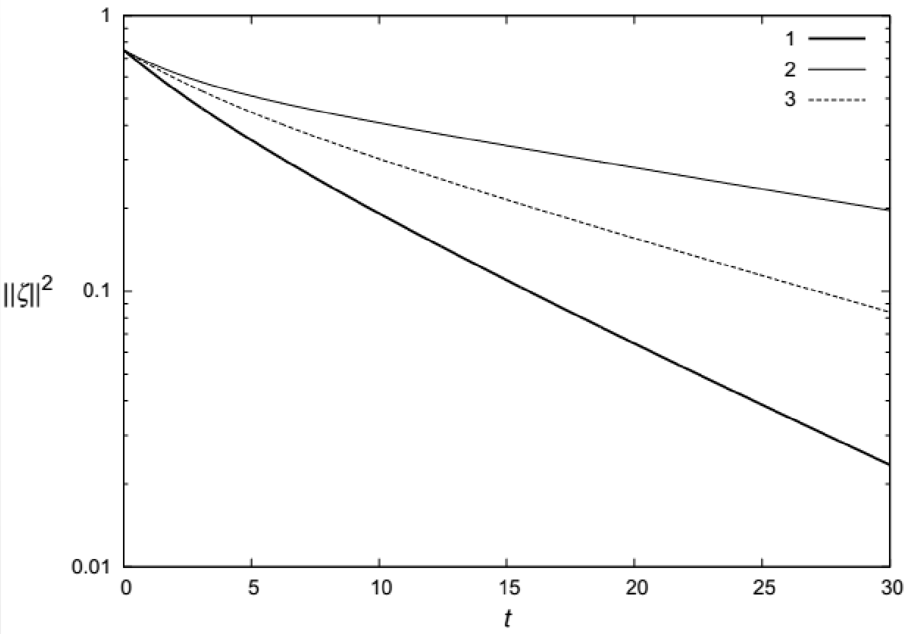
Сложим и воспользуемся тем, что $(g(\zeta,x) - \xi, \operatorname{sign}\zeta - \operatorname{sign}\xi) \ge 0$

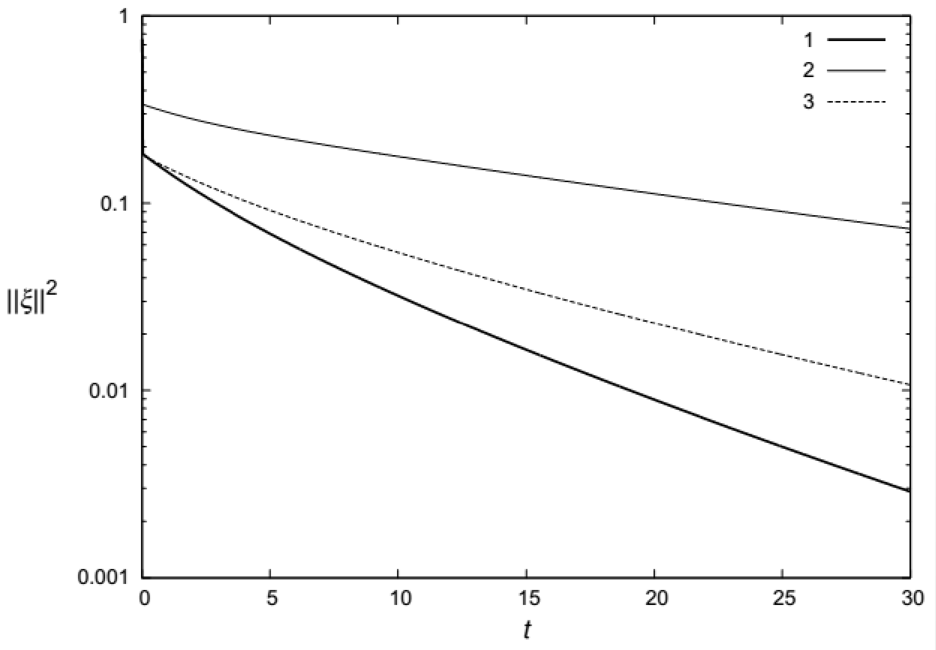
Глава 4. Устойчивость стационарных решений

4.3. Численные эксперименты

Численные методы

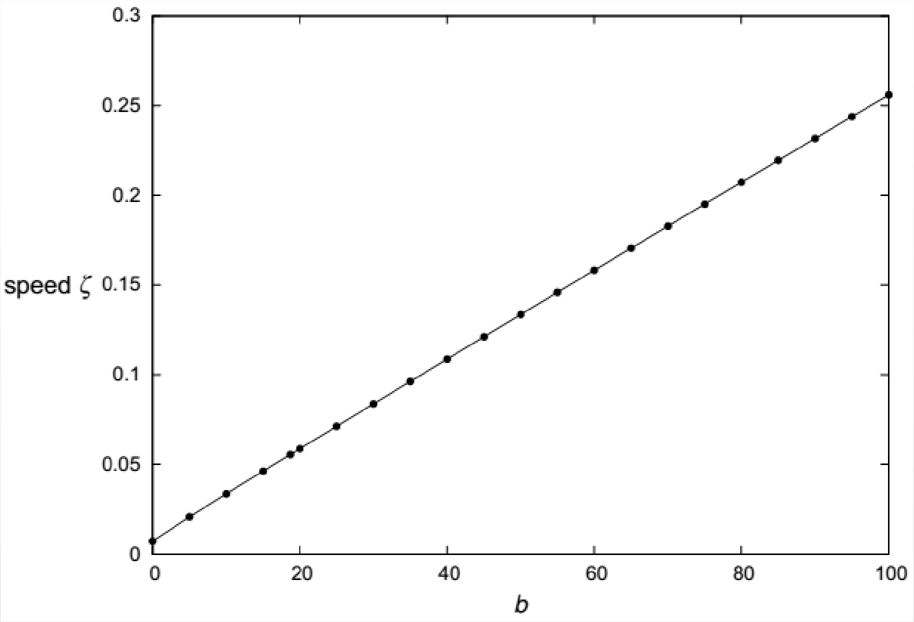
- Одномерная задача
- Метод конечных разностей
  - Линеаризация методом Ньютона
  - Неявный метод Эйлера
  - Аппроксимация граничных условий 2-го порядка
- Программная реализация
  - C++
  - Библиотека UMFPACK



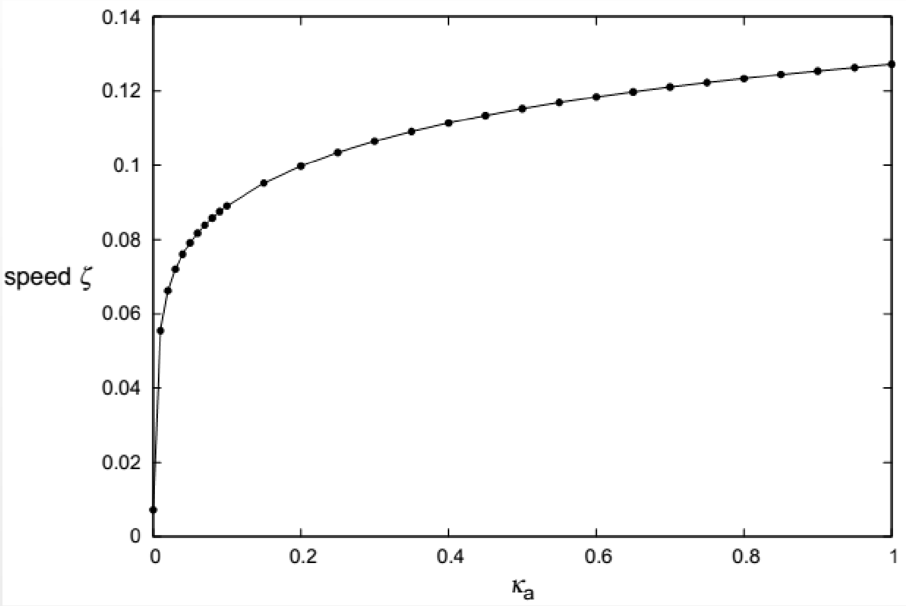


Квадрат норм отклонений в логарифмической шкале

- Стабилизация происходит экспоненциально, когда достаточное условие устойчивости выполняется и когда не выполняется



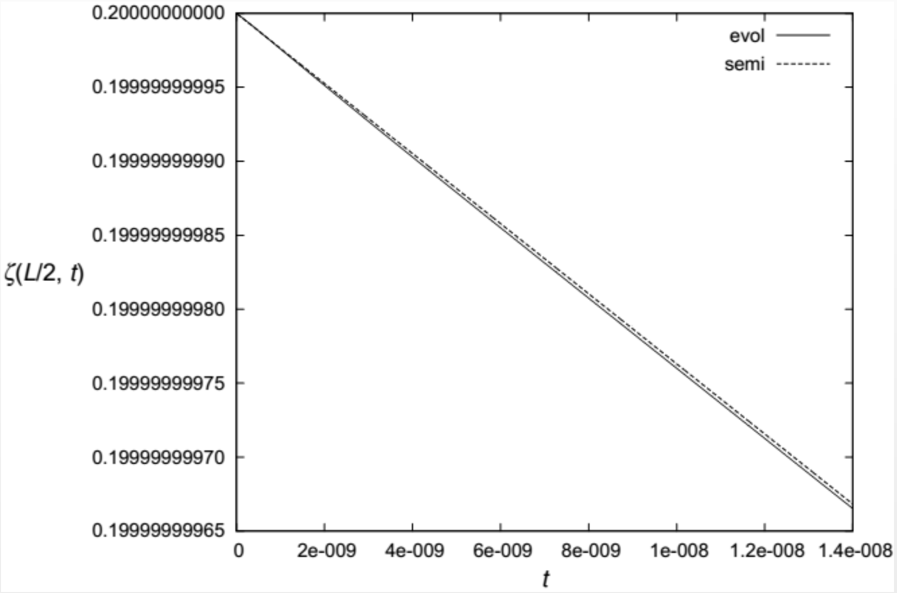
Зависимость скорости стабилизации от параметра b

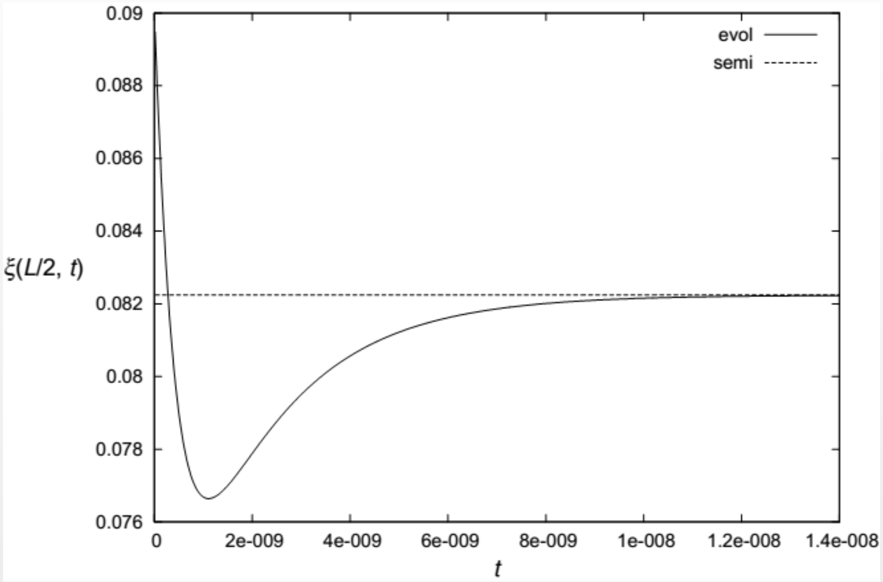


Зависимость скорости стабилизации от параметра κ_a

- При больших b, κ_a достаточное условие не выполняется
- Скорость стабилизации возрастает с ростом b и κ_a

Полустационарная модель





- Решение нестационарной модели быстро приближается к решению полустационарной модели

Глава 5. Задачи оптимального управления

5.1. Граничное управление для нестационарной модели

Задача оптимального управления

- Уравнение для интенсивности излучения *φ:*

$$\mu \partial\varphi/\partial t - \alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0$$

- Уравнение для температуры *θ*:

$$\partial\theta/\partial t - a\Delta\theta + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0,$$

- Граничные условия:

$$a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0,$$

- Начальное условие:

$$\theta|_{t=0} = \theta_0.$$

- Функция $u = u(x,t)$ играет роль управления

Граничный коэффициент

- $u(x,t)$ зависит от степени черноты поверхности $\varepsilon(x,t)$:

$$u = \frac{\varepsilon}{2(2-\varepsilon)}$$

- Степень черноты – это доля поглощаемого излучения
- Для абсолютно чёрной поверхности $\varepsilon = 1$, $u = 0.5$
- Для чисто рассеивающей поверхности $\varepsilon = u = 0$

Задача оптимального управления

- Граничное мультипликативное управление:

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial n} + u(\varphi - \theta_b^4)\Big|_\Gamma = 0$$

- Ограничения на управление:

$$u_1(x,t) \le u(x,t) \le u_2(x,t), \quad (x,t) \in \Sigma$$

- Функционал качества:

$$J(\theta, \varphi) = \int_0^T \int_\Omega (\theta - \theta_d)^2 dx dt \to \inf$$

Разрешимость задачи управления

- **Теорема 5.2.** Пусть выполняются условия (i)–(iv). Тогда задача оптимального управления разрешима.

- *Доказательство.*
- Предельный переход по управлениям и соответствующим им состояниям

Необходимые условия оптимальности

- Применение принципа Лагранжа затруднительно
- Другой подход:
  - Строим линеаризованную систему и доказываем её разрешимость
  - Строим сопряжённую систему
  - Комбинируем полученные системы

Сопряженная система

- Уравнения для сопряженного состояния:

$$-\partial p_1/\partial t - a\Delta p_1 - \mathbf{v}\cdot\nabla p_1 + 4\kappa_a\widehat{\theta}^3(bp_1 - p_2) = \widehat{\theta} - \theta_d,$$

$$-\mu\partial p_2/\partial t - \alpha\Delta p_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) = 0$$

$$a\partial_n p_1 + (\beta + \mathbf{v}\cdot\mathbf{n})p_1 = 0, \qquad \alpha\partial_n p_2 + \widehat{u}p_2 = 0$$

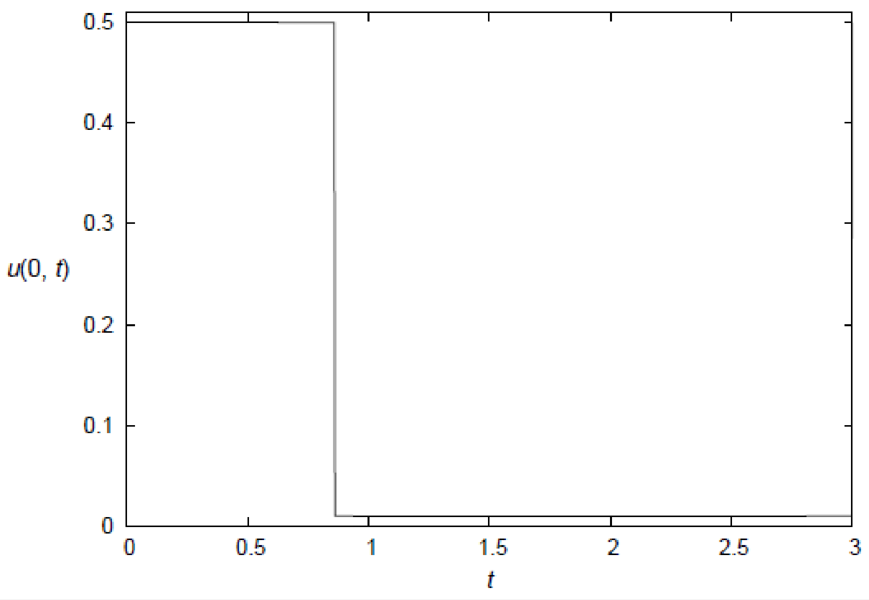
$$p_1\big|_{t=T} = 0, \quad p_2\big|_{t=T} = 0$$

- Аналог принципа bang-bang:

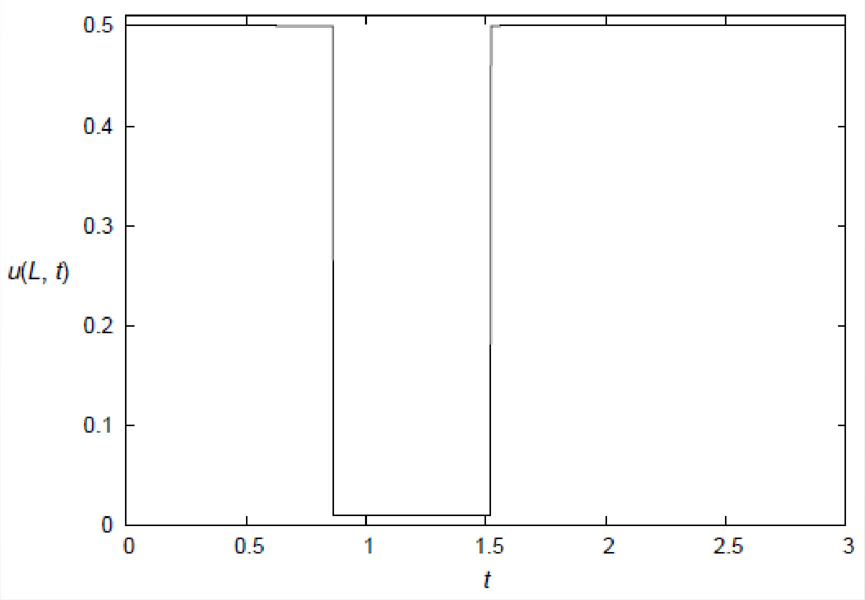
$$\widehat{u} = \begin{cases} u_1, & \text{если } (\widehat{\varphi} - \theta_b^4)p_2 < 0, \\ u_2, & \text{если } (\widehat{\varphi} - \theta_b^4)p_2 > 0. \end{cases}$$

  - Управление принимает минимальное либо максимальное значение

Численный пример



оптимальное управление при $x = 0$



оптимальное управление при $x = L$

- 1D: можно применить метод простой итерации

Глава 5. Задачи оптимального управления

5.2. Граничное управление с монотонными функционалами

Монотонные функционалы качества

- Функционал качества $J\colon [W \cap L^\infty(Q)]^2 \to \mathbb{R}$ *монотонный*, если

$$0 \le \theta_1 \le \theta_2,\ 0 \le \varphi_1 \le \varphi_2 \text{ п.в. в } Q \ \Rightarrow\ J(\theta_1, \varphi_1) \le J(\theta_2, \varphi_2)$$

- Множество допустимых управлений:

$$U_{ad} = \{u \in L^\infty(\Sigma)\colon u_1 \le u \le u_2\}$$

- Задача оптимального управления:

$$J(y) \to \inf$$

- $\widehat{u} \in U_{ad}$ – *сильное оптимальное управление*, если

$$\forall u \in U_{ad}\colon \widehat{\theta} \le \theta,\ \widehat{\varphi} \le \varphi \text{ п.в. в } Q$$

  - (наименьшие температура и интенсивность излучения)
- Сильное оптимальное управление является оптимальным управлением для любого монотонного функционала J
- Пример монотонного функционала – поток энергии через участок границы области

Достаточное условие сильного опт. упр.

- **Теорема 5.4.** Для того, чтобы функция $u \in U_{ad}$ была сильным оптимальным управлением, достаточно, чтобы

$$u = \begin{cases} u_1, & \textit{если} \;\; \varphi - \theta_b^4 < 0, \\ u_2, & \textit{если} \;\; \varphi - \theta_b^4 > 0 \end{cases}$$

- **Теорема 5.6.** Сильное оптимальное управление единственно с точностью до множества точек Σ, в которых $\varphi = \theta_b^4$.

- **Теорема 5.7.** Сильное оптимальное управление существует.
  - Доказана сходимость метода простой итерации

Глава 5. Задачи оптимального управления

5.3. Граничное управление для полустационарной модели

Полустационарная модель

- Уравнение для интенсивности излучения *φ*:

$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a(\varphi - |\theta|\theta^3) = 0,$$

- Уравнение для температуры *θ*:

$$\partial\theta/\partial t - a\Delta\theta + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta + b\kappa_a(|\theta|\theta^3 - \varphi) = 0,$$

- Граничные условия:

$$a\partial_n\theta + \beta(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\varphi + u(\varphi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0,$$

- Начальное условие:

$$\theta|_{t=0} = \theta_0.$$

- Функция $u = u(x)$, $x \in \Gamma$, играет роль управления

Задача оптимального управления

- Граничное мультипликативное управление:

$$\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial n} + u(\varphi - \theta_b^4)\Big|_\Gamma = 0$$

- Ограничения на управление:

$$u_1(x) \le u(x) \le u_2(x), \quad x \in \Gamma$$

- Функционал качества:

$$J(\theta,\varphi) = J_1(\theta,\varphi) + J_2(\theta|_{t=T}) \to \inf$$

- J_1, J_2 – дифференцируемые, ограниченные снизу и слабо полунепрерывные снизу функционалы

Условия на исходные данные

- (i) $\mathbf{v} \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega)),\ \operatorname{div}\mathbf{v} = 0$
- (ii) $0 \le \theta_b \in L^\infty(\Sigma),\quad \beta, u_1, u_2 \in L^\infty(\Gamma),$
  $0 < \beta_0 \le \beta,\quad 0 < u_0 \le u_1 \le u_2,\quad \beta_0, u_0 = \mathrm{Const}$
- (iii) $0 \le \theta_0 \in L^\infty(\Omega)$
- (iv) $\beta + \mathbf{v}\cdot\mathbf{n} \ge 0$ (малая скорость втекания среды)
- (v) $\dfrac{d\theta_b}{dt} \in L^2(\Sigma)$ (для док-ва разрешимости задачи управления)

Разрешимость задачи управления

- **Теорема 5.9.** Пусть выполняются условия (i)–(v). Тогда задача оптимального управления разрешима.
- *Доказательство.*
- Предельный переход по управлениям и соответствующим им состояниям
- Используем критерий компактности в $L^2(Q)$:

$$\int_0^{T-h} \|\varphi_k(t+h) - \varphi_k(t)\|^2 dt \le C h^{1/2}$$

Система оптимальности

- Функционал качества: $J(\theta, \varphi) = \int_0^T \int_\Omega (\theta - \theta_d)^2 dx dt \to \min$
- Сопряжённая система:

$$-\partial p_1/\partial t - a\Delta p_1 - \mathbf{v}\cdot\nabla p_1 + 4\kappa_a \widehat{\theta}^3 (bp_1 - p_2) = \widehat{\theta} - \theta_d,$$

$$-\alpha\Delta p_2 + \kappa_a(p_2 - bp_1) = 0,$$

$$a\partial_n p_1 + (\beta + \mathbf{v}\cdot\mathbf{n})p_1|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n p_2 + \widehat{u}p_2|_\Gamma = 0,$$

$$p_1|_{t=T} = 0.$$

- Соотношение для управления:

$$\widehat{u} = \begin{cases} u_1, & \text{если } q = \int_0^T (\widehat{\varphi} - \theta_b^4) p_2 dt < 0, \\ u_2, & \text{если } q > 0. \end{cases}$$

Оптимизационный алгоритм

- Приведённый функционал качества: $\widehat{J}(u) = J(y(u))$
- Аналог градиента:

$$\widehat{J}'(u) = -\int_0^T (\varphi - \theta_b^4) p_2 dt$$

- Градиентный метод:

$$u^{k+1} = P_{[u_1,u_2]}\left(u^k + \lambda \int_0^T (\varphi^k - \theta_b^4) p_2^k dt\right)$$

- При $\lambda = +\infty$ получаем метод простой итерации:

$$\widehat{u}^{k+1} = \begin{cases} u_1, & \text{если } q = \int_0^T (\widehat{\varphi}^k - \theta_b^4) p_2^k dt < 0, \\ u_2, & \text{если } q > 0. \end{cases}$$

Эвристический оптимизационный алгоритм

- Метод простой итерации не сходится
- Обобщение метода простой итерации:
  - Решение ищем в виде bang-bang управления
  - Управление пересчитываем *не во всех узлах*, а только *в некоторых*
  - Выбирается *не более k узлов*, в которых знак функции переключения не соответствует значению управления. *Узлы с максимальным модулем градиента*

Численное решение прямой задачи

- *Линеаризация:* Метод Ньютона

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - a\Delta\theta + b\kappa_a\left((4\theta_{old}^3\theta - 3\theta_{old}^4) - \varphi\right) = 0$$
$$-\alpha\Delta\varphi + \kappa_a\left(\varphi - (4\theta_{old}^3\theta - 3\theta_{old}^4)\right) = 0$$

Достаточно 2-3 итерации

- *Дискретизация по t:* Схема Кранка-Николсон

Два варианта:

$$\frac{y^{m+1}-y^m}{\tau} + A\frac{y^m+y^{m+1}}{2} + f\left(\frac{y^m+y^{m+1}}{2}\right) = g$$
$$\frac{y^{m+1}-y^m}{\tau} + A\frac{y^m+y^{m+1}}{2} + \frac{f(y^m)+f(y^{m+1})}{2} = g$$

A – линейный оператор, *f* – нелинейность

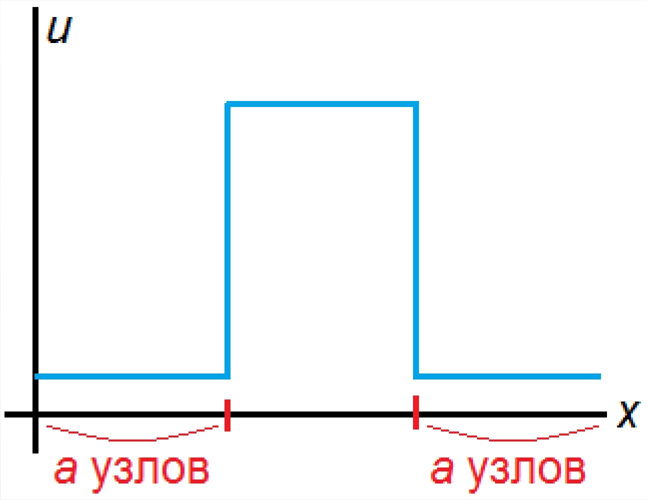
Счет проводился по 2-й схеме

  - Аппроксимация граничных условий 2-го порядка

- *Реализация:* МКЭ (FreeFem++), МКР (C++, UMFPACK)

Численный пример

- Ω – квадрат, симметричные исходные данные
- Управление ищем в виде



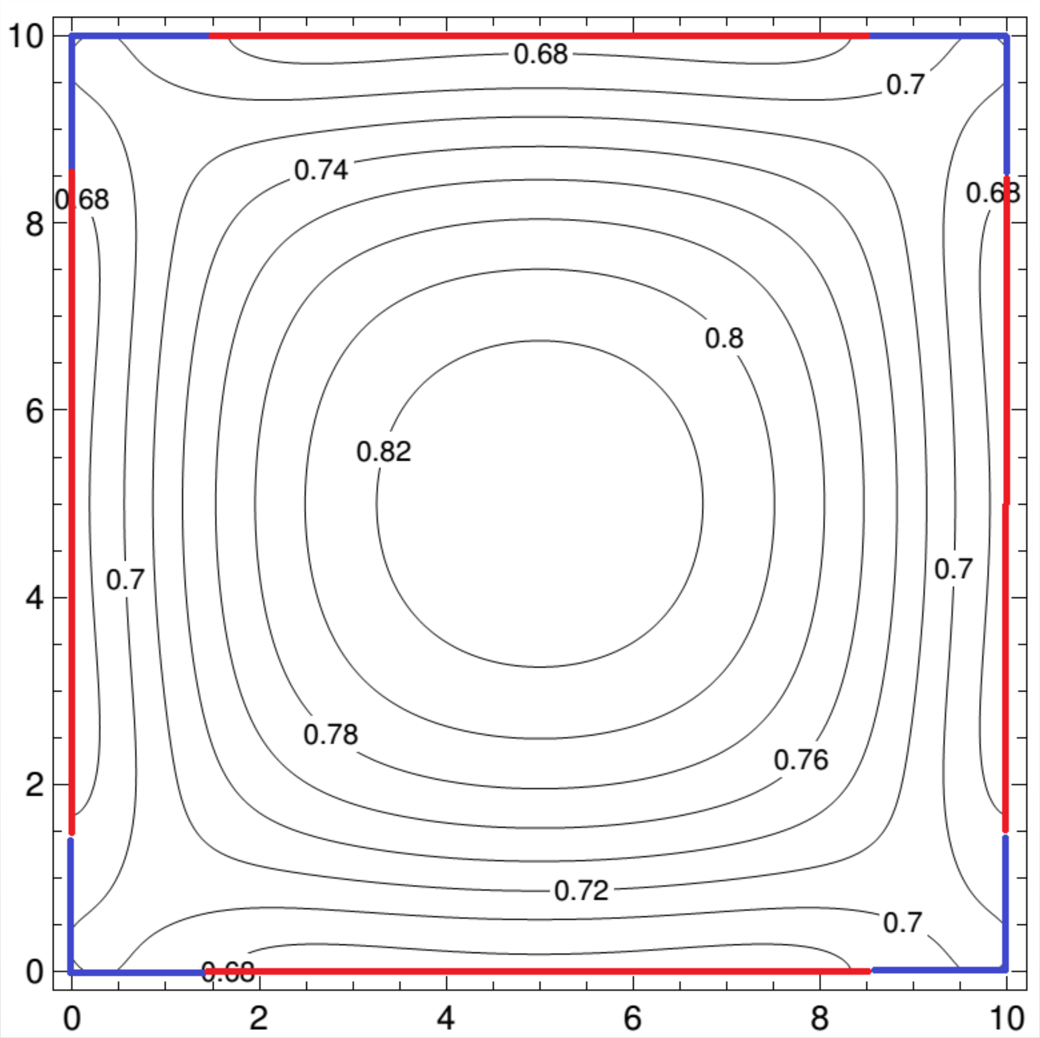
- $b = b(a)$ – число узлов на следующей итерации (знак ф-ии переключения)
- Решаем уравнение $b(a) = a$
- Сетка: $N = 300$

a	b
42	57
43	44
44	15

Функция $b(a)$ изменяется очень резко, поэтому метод простой итерации не сходится, а прыгает между крайними значениями

- Равенство $b = a$ обычно приближённое

Численный пример



$$\int_0^T \int_\Omega (\theta - \theta_d)^2 dx dt \to \min$$

$\theta_d = 0.8$

$u = 0.01$

$u = 0.5$

Поле температуры при $t = T$

Время вычислений

Время для одного временного слоя в секундах

N	МКЭ FreeFem++	МКР SuperLU 32bit	МКР UMFPACK 32bit	МКР UMFPACK 64bit
100	1.2	0.2	0.15	0.17
200	5	1.8	0.64	0.72
300	11.5	6.4	1.6	1.8
400				3.7
500				6.2

Заключение

- Доказана нелокальная однозначная разрешимость нестационарной модели сложного теплообмена
- Доказана нелокальная разрешимость нестационарной задачи о свободной конвекции с радиационным теплообменом, доказана единственность гладкого решения в малом по времени
- Доказана устойчивость по Ляпунову стационарного решения модели сложного теплообмена, получены достаточные условия асимптотической устойчивости
- Исследована задача граничного мультипликативного оптимального управления для нестационарной модели сложного теплообмена; для монотонных функционалов качества получены достаточные условия оптимальности и доказана сходимость численного алгоритма
- Исследована задача граничного мультипликативного оптимального управления для полустационарной модели сложного теплообмена, предложен эвристический алгоритм нахождения оптимального управления

Публикации

- Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю. Устойчивость стационарных решений диффузионной модели сложного теплообмена // *Дальневост. матем. журн.* 2014. Т. 14. № 1. С. 18–32.
- Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю. Нестационарная задача сложного теплообмена // *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.* 2014. Т. 54. № 11. С. 106–116.
- Гренкин Г.В. Оптимальное управление в нестационарной задаче сложного теплообмена // *Дальневост. матем. журн.* 2014. Т. 14. № 2. С. 160–172.

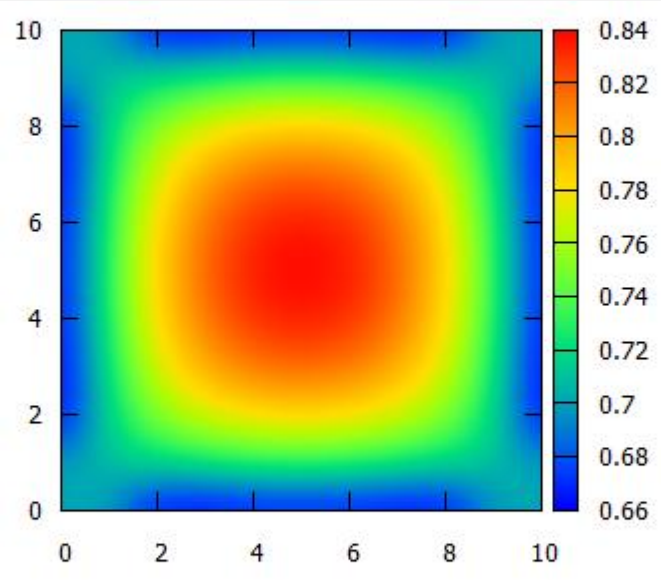
Свидетельства о регистрации программ

- Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю. Вычисление оптимальных отражающих свойств границы для эволюционной модели радиационно-кондуктивного теплообмена в плоскопараллельном слое. № 2015610469 от 12.01.2015.
- Гренкин Г.В., Чеботарев А.Ю., Ковтанюк А.Е. Оптимальное управление граничным коэффициентом в полустационарной модели радиационно-кондуктивного теплообмена в двумерной области. № 2015614304 от 14.04.2015.

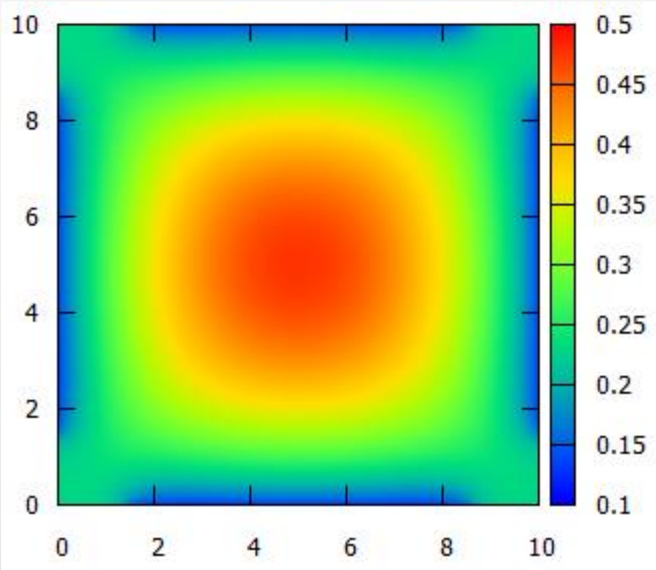
Участие в конференциях

- Конференция ШЕН ДВФУ (2014, 2015)
- Конференция ШЕН ДВФУ на английском языке (2014, 2015)
- Международная конференция «Dynamics and Structure of Combustion Waves» (Владивосток, ДВФУ, июль 2014 г.)
- XXXVIII Дальневосточная Математическая Школа-Семинар имени академика Е.В. Золотова (Владивосток, ИАПУ ДВО РАН, сентябрь 2014 г.)
- Всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Современные проблемы математики» (Уссурийск, ШП ДВФУ, декабрь 2014 г.)

Спасибо за внимание!



θ



φ