Кластеризация эмпирических данных ранговым методом

(Дополнение к курсовой работе)

Выполнил
студент 248 группы
Гренкин Г. В.
Руководитель:
ст. преподаватель кафедры информатики
Черныш Е. В.

Владивосток, 2011

Содержание

Аннотация

Разработаны численные алгоритмы.

2. Математические методы

2.14. Вычисление $\delta_{\min}\left(\nu_0, \delta_0'\right)$

Рассмотрим точки промежутка $[a...b]$:

$$\{(x_r, y_r)\}_{r=a}^{b}, b - a + 1 \geq 3,$$

$$x_a > x_{a+1} > \ldots > x_b,$$

$$y_a \leq y_{a+1} \leq \ldots \leq y_b.$$

Пусть ν_0 — целое число, удовлетворяющее неравенству

$$0 \leq \nu_0 \leq b - a + 1.$$

Пусть задано число δ_0' ($\delta_0' \geq 0$).

Требуется вычислить значение величины

$$\delta_{\min}\left(\nu_0, \delta_0'\right) = \inf_{(\gamma,c)\in\Phi_{\delta_0'}} \max_{a\leq r\leq b}{}_{\nu_0+1} \left|p_\gamma(x_r, y_r) - c\right|,$$

где

$$\Phi_{\delta_0'} = \left\{(\gamma, c) \mid \max_{a\leq r\leq b}\left|p_\gamma(x_r, y_r) - c\right| \leq \delta_0'\right\}.$$

Если $\Phi_{\delta_0'} = \varnothing$, то величина $\delta_{\min}\left(\nu_0, \delta_0'\right)$ не определена.

Заметим, что в случае, когда $\Phi_{\delta_0'} \neq \varnothing$ и $\nu_0 = b - a + 1$, имеем $\delta_{\min}\left(\nu_0, \delta_0'\right) = 0$.

Далее будем рассматривать случай

$$0 \leq \nu_0 < b - a + 1.$$

Предложение 14. Пусть функция $f(x, y)$ определена на множестве $D \subset \mathrm{R}^2$,

$Y(x) = \{y \in \mathrm{R} \mid (x, y) \in D\}$,

$\forall x' \in \mathrm{R}, Y(x') \neq \varnothing : \exists \min_{y\in Y(x')} f(x', y)$,

$\exists \min_{\substack{x\in \mathrm{R} \\ Y(x)\neq\varnothing}} \min_{y\in Y(x)} f(x, y) = a$.

Тогда $\exists \inf_{(x,y)\in D} f(x, y) = a$,

если $\forall x \in \mathrm{R} : Y(x) = \varnothing$, то $D = \varnothing$ и $\inf_{(x,y)\in D} f(x, y)$ не имеет смысла.

Доказательство.

$$\min_{\substack{x\in \mathrm{R} \\ Y(x)\neq\varnothing}} \min_{y\in Y(x)} f(x, y) = a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in \mathrm{R}, Y(x_0) \neq \varnothing : \min_{y\in Y(x)} f(x, y) \geq \min_{y\in Y(x_0)} f(x_0, y) = a \ \forall x \in \mathrm{R}, Y(x) \neq \varnothing;$$

$$\min_{y\in Y(x_0)} f(x_0, y) = a \Rightarrow \exists y_0 \in Y(x_0) : f(x_0, y) \geq f(x_0, y_0) = a \ \forall y \in Y(x_0);$$

$$\forall (x, y) \in D : f(x, y) \geq \min_{y\in Y(x)} f(x, y) \geq a.$$

Итак, $\exists (x_0, y_0) \in D : f(x, y) \geq f(x_0, y_0) = a \ \forall (x, y) \in D$.

Следовательно, $\exists \inf_{(x,y)\in D} f(x, y) = a$.

Обозначим

$$C_{\delta_0'}(\gamma) = \left\{c \mid (\gamma, c) \in \Phi_{\delta_0'}\right\} = \left\{c \mid \max_{a\leq r\leq b}\left|p_\gamma(x_r, y_r) - c\right| \leq \delta_0'\right\}.$$

По предложению 14, если

$$\forall\gamma\in\mathrm{R}, C_{\delta_0'}(\gamma)\neq\varnothing : \exists \min_{c\in C_{\delta_0'}(\gamma)} \max_{a\le r\le b}{}_{\nu_0+1}\left|p_\gamma(x_r,y_r)-c\right|,$$

$$\exists \min_{\substack{\gamma\in\mathrm{R}\\ C_{\delta_0'}(\gamma)\neq\varnothing}} \min_{c\in C_{\delta_0'}(\gamma)} \max_{a\le r\le b}{}_{\nu_0+1}\left|p_\gamma(x_r,y_r)-c\right|,$$

то

$$\delta_{\min}\left(\nu_0,\delta_0'\right)=\min_{\substack{\gamma\in\mathrm{R}\\ C_{\delta_0'}(\gamma)\neq\varnothing}} \min_{c\in C_{\delta_0'}(\gamma)} \max_{a\le r\le b}{}_{\nu_0+1}\left|p_\gamma(x_r,y_r)-c\right|,$$

если $\forall\gamma\in\mathrm{R}: C_{\delta_0'}(\gamma)\neq\varnothing$, то величина $\delta_{\min}\left(\nu_0,\delta_0'\right)$ не определена.

Предложение 15. $C_{\delta_0'}(\gamma)=\left\{c \mid \max\limits_{a\le r\le b} p_\gamma(x_r,y_r)-\delta_0' \le c\le \min\limits_{a\le r\le b} p_\gamma(x_r,y_r)+\delta_0'\right\}$.

Доказательство.

$$C_{\delta_0'}(\gamma)=\left\{c \mid \max_{a\le r\le b}\left|p_\gamma(x_r,y_r)-c\right|\le\delta_0'\right\};$$

$$\max_{a\le r\le b}\left|p_\gamma(x_r,y_r)-c\right|=\max\left\{\max_{a\le r\le b} p_\gamma(x_r,y_r)-c, c-\min_{a\le r\le b} p_\gamma(x_r,y_r)\right\}\le\delta_0' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\max\limits_{a\le r\le b} p_\gamma(x_r,y_r)-c\le\delta_0'\\ c-\min\limits_{a\le r\le b} p_\gamma(x_r,y_r)\le\delta_0'\end{cases}, \Leftrightarrow \max_{a\le r\le b} p_\gamma(x_r,y_r)-\delta_0'\le c\le\min_{a\le r\le b} p_\gamma(x_r,y_r)+\delta_0'.$$

Предложение 16.

$$\max_{a\le r\le b}{}_{\nu_0+1}\left|p_\gamma(x_r,y_r)-c\right|=\min_{0\le\nu\le\nu_0}\max\left\{\max_{a\le r\le b}{}_{\nu+1} p_\gamma(x_r,y_r)-c, c-\min_{a\le r\le b}{}_{\nu_0-\nu+1} p_\gamma(x_r,y_r)\right\}.$$

Таким образом,

$$\delta_{\min}\left(\nu_0,\delta_0'\right)=\min_{\substack{\gamma\in\mathrm{R}\\ C_{\delta_0'}(\gamma)\neq\varnothing}} \min_{c\in C_{\delta_0'}(\gamma)} \max_{a\le r\le b}{}_{\nu_0+1}\left|p_\gamma(x_r,y_r)-c\right|=$$

$$=\min_{\substack{\gamma\in\mathrm{R}\\ C_{\delta_0'}(\gamma)\neq\varnothing}} \min_{c\in C_{\delta_0'}(\gamma)} \min_{0\le\nu\le\nu_0}\max\left\{\max_{a\le r\le b}{}_{\nu+1} p_\gamma(x_r,y_r)-c, c-\min_{a\le r\le b}{}_{\nu_0-\nu+1} p_\gamma(x_r,y_r)\right\}=$$

$$=\min_{0\le\nu\le\nu_0}\min_{\substack{\gamma\in\mathrm{R}\\ C_{\delta_0'}(\gamma)\neq\varnothing}} \min_{c\in C_{\delta_0'}(\gamma)} \max\left\{\max_{a\le r\le b}{}_{\nu+1} p_\gamma(x_r,y_r)-c, c-\min_{a\le r\le b}{}_{\nu_0-\nu+1} p_\gamma(x_r,y_r)\right\}=$$

$$=\min_{0\le\nu\le\nu_0}\min_{\substack{\gamma\in\mathrm{R}\\ \varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0'\le\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0'}} \min_{c\in\left[\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0',\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0'\right]}\max\left\{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-c, c-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)\right\}.$$

Рассмотрим промежуток $[\gamma',\gamma'']$, на котором функции $\varphi_{\max}(\gamma)$, $\varphi_{\min}(\gamma)$, $\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)$, $\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)$ являются линейными.

Ставится задача вычисления

$$\min_{\substack{\gamma\in[\gamma',\gamma'']\\ \varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0\le\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0'}} \min_{c\in\left[\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0',\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0'\right]}\max\left\{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-c, c-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)\right\}.$$

Предложение 17. Пусть $\alpha\le\beta$.

$$\min_{c\in[\alpha,\beta]}\max\{B-c,c-A\}=\begin{cases}B-\beta, \dfrac{A+B}{2}\ge\beta,\\ \dfrac{B-A}{2}, \alpha\le\dfrac{A+B}{2}\le\beta,\\ \alpha-A, \dfrac{A+B}{2}\le\alpha.\end{cases}$$

Доказательство.

$B-c \ge c-A \Leftrightarrow c \le \dfrac{A+B}{2}$, следовательно, $\max\{B-c, c-A\} = \begin{cases} B-c, c \le \dfrac{A+B}{2}, \\ c-A, c \ge \dfrac{A+B}{2}. \end{cases}$

Если $\dfrac{A+B}{2} \ge \beta$, то $\min\limits_{c\in[\alpha,\beta]} \max\{B-c, c-A\} = \min\limits_{c\in[\alpha,\beta]} (B-c) = B-\beta$.

Если $\alpha \le \dfrac{A+B}{2} \le \beta$, то $\min\limits_{c\in[\alpha,\beta]} \max\{B-c, c-A\} = B - \dfrac{A+B}{2} = \dfrac{B-A}{2}$.

Если $\dfrac{A+B}{2} \le \alpha$, то $\min\limits_{c\in[\alpha,\beta]} \max\{B-c, c-A\} = \min\limits_{c\in[\alpha,\beta]} (c-A) = \alpha - A$.

Из предложения 17 следует, что

$$\min_{c\in\left[\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0', \varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0'\right]} \max\left\{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-c, c-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)\right\} =$$

$$= \begin{cases} \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \varphi_{\min}(\gamma) - \delta_0', \dfrac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2} \ge \varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0', \\ \dfrac{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)}{2}, \varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0' \le \dfrac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2} \le \varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0', \\ \varphi_{\max}(\gamma) - \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) - \delta_0', \dfrac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2} \le \varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0'. \end{cases}$$

Чтобы вычислить

$$\min_{\substack{\gamma\in[\gamma',\gamma''] \\ \varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0 \le \varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0}}, \min_{c\in\left[\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0', \varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0'\right]} \max\left\{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-c, c-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)\right\},$$

найдём множество

$$A = \left\{\gamma \in [\gamma', \gamma''] \mid \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0' \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'\right\}.$$

Пусть

$$\varphi_{\max}(\gamma) = k_{\max}\gamma + b_{\max},$$
$$\varphi_{\min}(\gamma) = k_{\min}\gamma + b_{\min}.$$

$$\varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0' \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0' \Leftrightarrow k_{\max}\gamma + b_{\max} - \delta_0' \le k_{\min}\gamma + b_{\min} + \delta_0' \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (k_{\max} - k_{\min})\gamma \le b_{\min} - b_{\max} + 2\delta_0'.$$

Рассмотрим 3 случая.

1) $k_{\max} > k_{\min}$.

$$(k_{\max} - k_{\min})\gamma \le b_{\min} - b_{\max} + 2\delta_0' \Leftrightarrow \gamma \le \tilde{\gamma}'' = \frac{b_{\min} - b_{\max} + 2\delta_0'}{(k_{\max} - k_{\min})}.$$

Пусть $\gamma_1 = \gamma', \gamma_2 = \min\{\gamma'', \tilde{\gamma}''\}$.

Если $\gamma_1 > \gamma_2$, то $A = \varnothing$, иначе $A = [\gamma_1, \gamma_2]$.

2) $k_{\max} < k_{\min}$.

$$(k_{\max} - k_{\min})\gamma \le b_{\min} - b_{\max} + 2\delta_0' \Leftrightarrow \gamma \ge \tilde{\gamma}' = \frac{b_{\min} - b_{\max} + 2\delta_0'}{(k_{\max} - k_{\min})}.$$

Пусть $\gamma_1 = \max\{\gamma', \tilde{\gamma}'\}, \gamma_2 = \gamma''$.

Если $\gamma_1 > \gamma_2$, то $A = \varnothing$, иначе $A = [\gamma_1, \gamma_2]$.

3) $k_{\max} = k_{\min}$.

$$(k_{\max} - k_{\min})\gamma \le b_{\min} - b_{\max} + 2\delta_0' \Leftrightarrow b_{\min} - b_{\max} + 2\delta_0' \ge 0.$$

Если $b_{\min} - b_{\max} + 2\delta_0' \ge 0$, то $A = [\gamma_1, \gamma_2]$, где $\gamma_1 = \gamma', \gamma_2 = \gamma''$, иначе $A = \varnothing$.

Требуется вычислить

$$\min_{\gamma\in[\gamma_1,\gamma_2]}\ \min_{c\in\left[\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}',\,\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}'\right]}\max\left\{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-c,\,c-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)\right\}.$$

Найдём множества

$$B_1=\left\{\gamma\in[\gamma_1,\gamma_2]\,|\,\frac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2}\ge\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}'\right\},$$

$$B_2=\left\{\gamma\in[\gamma_1,\gamma_2]\,|\,\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}'\le\frac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2}\le\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}'\right\},$$

$$B_3=\left\{\gamma\in[\gamma_1,\gamma_2]\,|\,\frac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2}\le\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}'\right\}.$$

Воспользуемся формулой

$$\min_{\gamma\in[\gamma_1,\gamma_2]}\ \min_{c\in\left[\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}',\,\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}'\right]}\max\left\{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-c,\,c-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)\right\}= \tag{1}$$

$$=\min\left\{\min_{\gamma\in B_1}\left(\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\varphi_{\min}(\gamma)-\delta_0{}'\right),\min_{\gamma\in B_2}\frac{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)}{2},\min_{\gamma\in B_3}\left(\varphi_{\max}(\gamma)-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)-\delta_0{}'\right)\right\}.$$

Рассмотрим промежуток $(-\infty,\gamma'']$, на котором функции $\varphi_{\max}(\gamma)$, $\varphi_{\min}(\gamma)$, $\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)$, $\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)$ являются линейными.

Требуется вычислить

$$\min_{\substack{\gamma\in(-\infty,\gamma'']\\ \varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}'\le\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}'}}\ \min_{c\in\left[\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}',\,\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}'\right]}\max\left\{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-c,\,c-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)\right\}.$$

Найдём множество

$$A=\left\{\gamma\in(-\infty,\gamma'']\,|\,\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}'\le\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}'\right\}.$$

Рассмотрим 3 случая.

1) $k_{\max}>k_{\min}$.

$\gamma\le\tilde{\gamma}''$.

Пусть $\gamma_2=\min\{\gamma'',\tilde{\gamma}''\}$.

$A=(-\infty,\gamma_2]$.

2) $k_{\max}<k_{\min}$.

$\gamma\ge\tilde{\gamma}'$.

Пусть $\gamma_1=\tilde{\gamma}',\gamma_2=\gamma''$.

Если $\gamma_1>\gamma_2$, то $A=\varnothing$, иначе $A=[\gamma_1,\gamma_2]$.

3) $k_{\max}=k_{\min}$.

Если $b_{\min}-b_{\max}+2\delta_0{}'\ge 0$, то $A=(-\infty,\gamma_2]$, где $\gamma_2=\gamma''$, иначе $A=\varnothing$.

Замечание. Возможен только случай 2.

Требуется вычислить

$$\min_{\gamma\in A}\ \min_{c\in\left[\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}',\,\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}'\right]}\max\left\{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-c,\,c-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)\right\}.$$

Найдём множества

$$B_1=\left\{\gamma\in A\,|\,\frac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2}\ge\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}'\right\},$$

$$B_2=\left\{\gamma\in A\,|\,\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}'\le\frac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2}\le\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}'\right\},$$

$$B_3=\left\{\gamma\in A\,|\,\frac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2}\le\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}'\right\}.$$

Воспользуемся формулой, аналогичной формуле (1).

Рассмотрим промежуток $[\gamma',+\infty)$, на котором функции $\varphi_{\max}(\gamma)$, $\varphi_{\min}(\gamma)$, $\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)$, $\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)$ являются линейными.

Требуется вычислить

$$\min_{\substack{\gamma\in[\gamma',+\infty)\\ \varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0'\le\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0'}}\ \min_{c\in[\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0',\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0']}\max\left\{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-c,c-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)\right\}.$$

Найдём множество

$$A=\left\{\gamma\in[\gamma',+\infty)\mid\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0'\le\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0'\right\}.$$

Рассмотрим 3 случая.

1) $k_{\max} > k_{\min}$.

$\gamma\le\tilde{\gamma}''$.

Пусть $\gamma_1=\gamma',\gamma_2=\tilde{\gamma}''$.

Если $\gamma_1>\gamma_2$, то $A = \varnothing$, иначе $A = [\gamma_1, \gamma_2]$.

2) $k_{\max} < k_{\min}$.

$\gamma\ge\tilde{\gamma}'$.

Пусть $\gamma_1=\max\{\gamma',\tilde{\gamma}'\}$.

$A = [\gamma_1, +\infty)$.

3) $k_{\max} = k_{\min}$.

Если $b_{\min}-b_{\max}+2\delta_0'\ge 0$, то $A = [\gamma_1, +\infty)$, где $\gamma_1=\gamma'$, иначе $A = \varnothing$.

Замечание. Возможен только случай 1.

Требуется вычислить

$$\min_{\gamma\in A}\ \min_{c\in[\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0',\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0']}\max\left\{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-c,c-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)\right\}.$$

Найдём множества

$$B_1=\left\{\gamma\in A\mid\frac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2}\ge\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0'\right\},$$

$$B_2=\left\{\gamma\in A\mid\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0'\le\frac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2}\le\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0'\right\},$$

$$B_3=\left\{\gamma\in A\mid\frac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2}\le\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0'\right\}.$$

Воспользуемся формулой, аналогичной формуле (1).

Приведём алгоритм вычисления $\delta_{\min}\left(\nu_0,\delta_0'\right)$.

Предположим, что имеется перечислитель, который позволяет перебрать все промежутки $[\gamma',\gamma'']$, на которых функции $\varphi_{\max}(\gamma)$, $\varphi_{\min}(\gamma)$, $\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)$, $\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)$ являются линейными. При этом нужно также учесть полубесконечные промежутки $(-\infty,\gamma'']$ и $[\gamma',+\infty)$.

Алгоритм 7.

flag $\leftarrow$ false;

for $\nu\leftarrow 0$ **to** ν_0 **do**

  for $I\leftarrow(-\infty,\gamma'']$, $[\gamma',\gamma'']$, $[\gamma',+\infty)$ **do**

  // промежутки, на которых функции $\varphi_{\max}(\gamma)$, $\varphi_{\min}(\gamma)$, $\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)$, $\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)$

  // являются линейными

    $A\leftarrow I\cap\left\{\gamma\mid\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0'\le\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0'\right\}$;

    $B_1\leftarrow A\cap\left\{\gamma\mid\frac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2}\ge\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0'\right\}$;

$B_2 \leftarrow A \cap \left\{ \gamma \mid \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0{}' \le \frac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2} \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0{}' \right\}$;

$B_3 \leftarrow A \cap \left\{ \gamma \mid \frac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2} \le \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0{}' \right\}$;

if ($B_1 \ne \varnothing$) **then**

$x \leftarrow \min\limits_{\gamma \in B_1} \left(\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \varphi_{\min}(\gamma) - \delta_0{}' \right)$;

if (*flag* = false) **then**

$m \leftarrow x$;

flag ← true;

else

$m \leftarrow \min\{m, x\}$;

end

end

if ($B_2 \ne \varnothing$) **then**

$x \leftarrow \min\limits_{\gamma \in B_2} \frac{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)}{2}$;

if (*flag* = false) **then**

$m \leftarrow x$;

flag ← true;

else

$m \leftarrow \min\{m, x\}$;

end

end

if ($B_3 \ne \varnothing$) **then**

$x \leftarrow \min\limits_{\gamma \in B_3} \left(\varphi_{\max}(\gamma) - \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) - \delta_0{}' \right)$;

if (*flag* = false) **then**

$m \leftarrow x$;

flag ← true;

else

$m \leftarrow \min\{m, x\}$;

end

end

end

end

if (*flag* = true) **then**

$\delta_{\min}\left(\nu_0, \delta_0{}'\right) \leftarrow m$;

else

$\delta_{\min}\left(\nu_0, \delta_0{}'\right)$ не определена;

end

Время выполнения алгоритма — $O(M(\nu_0 + 1))$, где $M = b - a + 1$.

Приведём алгоритм вычисления множества $D = \{\gamma \mid a\gamma \le b\}$.

Алгоритм 8.

if ($a > 0$) **then**

$D \leftarrow \left(-\infty, \frac{b}{a} \right]$;

else if ($a < 0$) **then**

$D \leftarrow \left[\frac{b}{a}, +\infty\right)$;

else

if ($b \geq 0$) **then**

$D \leftarrow (-\infty, +\infty)$;

else

$D \leftarrow \varnothing$;

end

end

Приведём алгоритм вычисления множества $D = \{\gamma \mid a\gamma \geq b\}$.

Алгоритм 9.

if ($a > 0$) **then**

$D \leftarrow \left[\frac{b}{a}, +\infty\right)$;

else if ($a < 0$) **then**

$D \leftarrow \left(-\infty, \frac{b}{a}\right]$;

else

if ($b \leq 0$) **then**

$D \leftarrow (-\infty, +\infty)$;

else

$D \leftarrow \varnothing$;

end

end

Приведём алгоритм вычисления пересечения промежутков $D = [a, b] \cap [c, d]$, где a, b, c, d могут равняться $\pm\infty$.

Алгоритм 10.

$l \leftarrow \max\{a, c\}$;

$r \leftarrow \min\{b, d\}$;

if ($l > r$) **then**

$D \leftarrow \varnothing$;

else

$D \leftarrow [l, r]$;

end

Также воспользуемся формулой

$$\min_{\gamma \in [\gamma_1, \gamma_2]} (k\gamma + b) = \min\{k\gamma_1 + b, k\gamma_2 + b\}.$$

Замечание. Пусть требуется найти $\delta_{\min}\left(\nu, \delta_0'\right)$, $\nu = 0, 1, \ldots, \nu_0$. Можно применить алгоритмы 6 и 6′, после чего $O\left((\nu_0 + 1)^2\right)$ раз применить алгоритм 7 или алгоритм, аналогичный алгоритму 4. Таким образом, данная задача может быть решена за время $O\left(M(\nu_0 + 1)^2\right)$.

Вычислить матрицу $\left\{\delta_{\min}^{a,b}\left(\nu_0, \delta_0'\right)\right\}_{[a \ldots b] \in T}$ можно за время $O\left(n^3(\nu_0 + 1)\right)$.

2.15. Вычисление $\nu_{\min}\left(\delta_0, \delta_0'\right)$

Пусть заданы неотрицательные числа δ_0 и δ_0' ($\delta_0' \geq \delta_0$).

Приведём алгоритм вычисления $\nu_{\min}\left(\delta_0, \delta_0'\right)$.

Алгоритм 11.

if ($\delta_{\min}(0,\infty) > \delta_0'$) **then**

$\nu_{\min}\left(\delta_0, \delta_0'\right)$ не определена;

else

for $\nu \leftarrow 0$ **to** $b - a + 1$ **do**

if ($\delta_{\min}\left(\nu, \delta_0'\right) \le \delta_0$) **then**

$\nu_{\min}\left(\delta_0, \delta_0'\right) \leftarrow \nu$;

break;

end

end

end

Время выполнения алгоритма — $O\left(M^3\right)$, где $M = b - a + 1$.

Вычислить матрицу $\left\{\nu_{\min}^{a,b}\left(\delta_0, \delta_0'\right)\right\}_{[a\ldots b]\in T}$ можно за время $O\left(n^5\right)$.

2.16. Вычисление $\rho_L^{a,k}(x_0, y_0)$

Пусть заданы кластер $[a\ldots k]$ и точка (x_0, y_0). Пусть задан уровень качества промежутка $L = \left(\delta_0, \nu_0, \delta_0'\right)$, $\delta_0' \ge \delta_0 \ge 0, 0 \le \nu_0 \le k - a + 1$.

Требуется вычислить значение величины

$$\rho_L^{a,k}(x_0, y_0) = \inf_{(\gamma,c)\in\Phi_L^{a,k}} \delta(x_0, y_0, \gamma, c),$$

где

$$\Phi_L^{a,k} = \left\{(\gamma, c) \mid \left(\max_{a\le r\le k} \delta(x_r, y_r, \gamma, c) \le \delta_0'\right) \wedge \left(\max_{\substack{\nu_0+1 \\ a\le r\le k}} \delta(x_r, y_r, \gamma, c) \le \delta_0\right)\right\}.$$

Если $\Phi_L^{a,k} = \varnothing$, то величина $\rho_L^{a,k}(x_0, y_0)$ не определена.

Рассмотрим случай $L = (\delta_0, 0, \infty)$.

В этом случае

$$\Phi_L^{a,k} = \Phi_{\delta_0}^{a,k} = \left\{(\gamma, c) \mid \max_{a\le r\le k} \delta(x_r, y_r, \gamma, c) \le \delta_0\right\}.$$

Обозначим

$$C_{\delta_0}(\gamma) = \left\{c \mid (\gamma, c) \in \Phi_{\delta_0}^{a,k}\right\}.$$

По предложению 14, если

$$\forall \gamma \in \mathrm{R}, C_{\delta_0}(\gamma) \ne \varnothing : \exists \min_{c\in C_{\delta_0}(\gamma)} \delta(x_0, y_0, \gamma, c),$$

$$\exists \min_{\substack{\gamma\in \mathrm{R} \\ C_{\delta_0}(\gamma)\ne\varnothing}} \min_{c\in C_{\delta_0}(\gamma)} \delta(x_0, y_0, \gamma, c),$$

то

$$\rho_L^{a,k}(x_0, y_0) = \min_{\substack{\gamma\in \mathrm{R} \\ C_{\delta_0}(\gamma)\ne\varnothing}} \min_{c\in C_{\delta_0}(\gamma)} \delta(x_0, y_0, \gamma, c),$$

если $\forall \gamma \in \mathrm{R} : C_{\delta_0}(\gamma) = \varnothing$, то величина $\rho_L^{a,k}(x_0, y_0)$ не определена.

Введём функцию $\varphi_0(\gamma) = x_0\gamma + y_0$.

Заметим, что

$$\rho_L^{a,k}(x_0, y_0) = \min_{\substack{\gamma \in \mathrm{R} \\ C_{\delta_0}(\gamma) \neq \varnothing}} \min_{c \in C_{\delta_0}(\gamma)} |\varphi_0(\gamma) - c|.$$

По предложению 15,

$$C_{\delta_0}(\gamma) = \{c \mid \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0 \le c \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0\}.$$

Предложение 18. Пусть $c_1 \le c_2$.

$$\min_{c \in [c_1, c_2]} |x - c| = \begin{cases} c_1 - x, x \le c_1, \\ 0, c_1 \le x \le c_2, \\ x - c_2, x \ge c_2. \end{cases}$$

Доказательство.

Если $x \le c_1$, то $|x - c| = c - x$ на $[c_1, c_2] \Rightarrow \min_{c \in [c_1, c_2]} |x - c| = c_1 - x$.

Если $c_1 \le x \le c_2$, то $|x - c| = 0$ при $c = x \in [c_1, c_2] \Rightarrow \min_{c \in [c_1, c_2]} |x - c| = 0$.

Если $x \ge c_2$, то $|x - c| = x - c$ на $[c_1, c_2] \Rightarrow \min_{c \in [c_1, c_2]} |x - c| = x - c_2$.

Из предложения 18 следует, что

$$\min_{c \in C_{\delta_0}(\gamma)} |\varphi_0(\gamma) - c| = \min_{c \in [\varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0, \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0]} |\varphi_0(\gamma) - c| = \begin{cases} \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0 - \varphi_0(\gamma), \varphi_0(\gamma) \le \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0, \\ 0, \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0 \le \varphi_0(\gamma) \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0, \\ \varphi_0(\gamma) - \varphi_{\min}(\gamma) - \delta_0, \varphi_0(\gamma) \ge \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0. \end{cases}$$

Рассмотрим промежуток $[\gamma', \gamma'']$, на котором функции $\varphi_{\max}(\gamma)$, $\varphi_{\min}(\gamma)$, $\varphi_0(\gamma)$ являются линейными.

Требуется вычислить

$$\min_{\substack{\gamma \in [\gamma', \gamma''] \\ \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0 \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0}} \min_{c \in [\varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0, \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0]} |\varphi_0(\gamma) - c|.$$

Найдём множество

$$A = \{\gamma \in [\gamma', \gamma''] \mid \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0 \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0\}.$$

Найдём множества

$$B_1 = \{\gamma \in A \mid \varphi_0(\gamma) \le \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0\},$$

$$B_2 = \{\gamma \in A \mid \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0 \le \varphi_0(\gamma) \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0\},$$

$$B_3 = \{\gamma \in A \mid \varphi_0(\gamma) \ge \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0\}.$$

Воспользуемся формулой

$$\min_{\gamma \in A} \min_{c \in [\varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0, \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0]} |\varphi_0(\gamma) - c| = \min\Big\{\min_{\gamma \in B_1}(\varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0 - \varphi_0(\gamma)), \min_{\gamma \in B_2} 0,$$
$$\min_{\gamma \in B_3}(\varphi_0(\gamma) - \varphi_{\min}(\gamma) - \delta_0)\Big\}.$$

Случаи промежутков $(-\infty, \gamma'']$ и $[\gamma', +\infty)$ рассматриваются аналогично.

Приведём алгоритм вычисления $\rho_L^{a,k}(x_0, y_0)$ для случая $L = (\delta_0, 0, \infty)$.

Предположим, что имеется перечислитель, который позволяет перебрать все промежутки $(-\infty, \gamma'']$, $[\gamma', \gamma'']$, $[\gamma', +\infty)$, на которых функции $\varphi_{\max}(\gamma)$, $\varphi_{\min}(\gamma)$ являются линейными.

Алгоритм 12.

flag $\leftarrow$ false;

for $I \leftarrow (-\infty, \gamma'']$, $[\gamma', \gamma'']$, $[\gamma', +\infty)$ **do**

// промежутки, на которых функции $\varphi_{\max}(\gamma)$, $\varphi_{\min}(\gamma)$

// являются линейными

 $A \leftarrow I \cap \{\gamma \mid \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0 \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0\}$;

 $B_1 \leftarrow A \cap \{\gamma \mid \varphi_0(\gamma) \le \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0\}$;

 $B_2 \leftarrow A \cap \{\gamma \mid \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0 \le \varphi_0(\gamma) \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0\}$;

$B_3 \leftarrow A \cap \{\gamma \mid \varphi_0(\gamma) \geq \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0\}$;
if ($B_1 \neq \varnothing$) **then**
  $x \leftarrow \min\limits_{\gamma \in B_1}(\varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0 - \varphi_0(\gamma))$;
  if (*flag* = false) **then**
    $m \leftarrow x$;
    flag $\leftarrow$ true;
  else
    $m \leftarrow \min\{m, x\}$;
  end
end
if ($B_2 \neq \varnothing$) **then**
  $x \leftarrow 0$;
  if (*flag* = false) **then**
    $m \leftarrow x$;
    flag $\leftarrow$ true;
  else
    $m \leftarrow \min\{m, x\}$;
  end
end
if ($B_3 \neq \varnothing$) **then**
  $x \leftarrow \min\limits_{\gamma \in B_3}(\varphi_0(\gamma) - \varphi_{\min}(\gamma) - \delta_0)$;
  if (*flag* = false) **then**
    $m \leftarrow x$;
    flag $\leftarrow$ true;
  else
    $m \leftarrow \min\{m, x\}$;
  end
end
end
if (*flag* = true) **then**
  $\rho_L^{a,k}(x_0, y_0) \leftarrow m$;
else
  $\rho_L^{a,k}(x_0, y_0)$ не определена;
end

Время выполнения алгоритма — $O(M)$, где $M = k - a + 1$.

Рассмотрим случай $L = (\delta_0, \nu_0, \infty)$.

В этом случае

$$\Phi_L^{a,k} = \left\{(\gamma, c) \mid \max\nolimits_{\substack{\nu_0+1 \\ a \leq r \leq k}} \delta(x_r, y_r, \gamma, c) \leq \delta_0\right\}.$$

Если $\nu_0 = k - a + 1$, то $\Phi_L^{a,k} = \mathrm{R}^2$ и $\rho_L^{a,k}(x_0, y_0) = 0$.

Далее будем рассматривать случай $0 \leq \nu_0 < k - a + 1$.

Обозначим

$$C_L(\gamma) = \{c \mid (\gamma, c) \in \Phi_L^{a,k}\}.$$

По предложению 14, если

$$\forall \gamma \in \mathrm{R}, C_L(\gamma) \neq \varnothing : \exists \min_{c \in C_L(\gamma)} \delta(x_0, y_0, \gamma, c),$$

$$\exists \min_{\substack{\gamma \in \mathrm{R} \\ C_L(\gamma) \neq \varnothing}} \min_{c \in C_L(\gamma)} \delta(x_0, y_0, \gamma, c),$$

то

$$\rho_L^{a,k}(x_0,y_0)=\min_{\substack{\gamma\in R\\ C_L(\gamma)\neq\varnothing}}\ \min_{c\in C_L(\gamma)}\delta(x_0,y_0,\gamma,c),$$

если $\forall\gamma\in R: C_L(\gamma)=\varnothing$, то величина $\rho_L^{a,k}(x_0,y_0)$ не определена.

Заметим, что

$$\rho_L^{a,k}(x_0,y_0)=\min_{\substack{\gamma\in R\\ C_L(\gamma)\neq\varnothing}}\ \min_{c\in C_L(\gamma)}|\varphi_0(\gamma)-c|.$$

Предложение 19. Пусть $L=(\delta_0,\nu_0,\infty)$.

$$C_L(\gamma)=\bigcup_{\nu=0}^{\nu_0}\left\{c\mid\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\delta_0\le c\le\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\delta_0\right\}.$$

Из предложения 19 следует, что

$$\min_{c\in C_L(\gamma)}|\varphi_0(\gamma)-c|=\min_{0\le\nu\le\nu_0}\ \min_{c\in\left[\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\delta_0,\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\delta_0\right]}|\varphi_0(\gamma)-c|,$$

$$\rho_L^{a,k}(x_0,y_0)=\min_{0\le\nu\le\nu_0}\ \min_{\substack{\gamma\in R\\ \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\delta_0\le\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\delta_0}}\ \min_{c\in\left[\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\delta_0,\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\delta_0\right]}|\varphi_0(\gamma)-c|.$$

По предложению 18,

$$\min_{c\in\left[\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\delta_0,\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\delta_0\right]}|\varphi_0(\gamma)-c|=\begin{cases}\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\delta_0-\varphi_0(\gamma), \varphi_0(\gamma)\le\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\delta_0,\\ 0, \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\delta_0\le\varphi_0(\gamma)\le\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\delta_0,\\ \varphi_0(\gamma)-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)-\delta_0, \varphi_0(\gamma)\ge\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\delta_0.\end{cases}$$

Приведём алгоритм вычисления $\rho_L^{a,k}(x_0,y_0)$ для случая $L=(\delta_0,\nu_0,\infty)$.

Алгоритм 13.

flag $\leftarrow$ false;
for $\nu\leftarrow 0$ **to** ν_0 **do**
  for $I\leftarrow(-\infty,\gamma''],\ [\gamma',\gamma''],\ [\gamma',+\infty)$ **do**
  // промежутки, на которых функции $\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)$, $\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)$
  // являются линейными
    $A\leftarrow I\cap\left\{\gamma\mid\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\delta_0\le\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\delta_0\right\}$;
    $B_1\leftarrow A\cap\left\{\gamma\mid\varphi_0(\gamma)\le\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\delta_0\right\}$;
    $B_2\leftarrow A\cap\left\{\gamma\mid\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\delta_0\le\varphi_0(\gamma)\le\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\delta_0\right\}$;
    $B_3\leftarrow A\cap\left\{\gamma\mid\varphi_0(\gamma)\ge\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\delta_0\right\}$;
    if ($B_1\neq\varnothing$) **then**
      $x\leftarrow\min_{\gamma\in B_1}\left(\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\delta_0-\varphi_0(\gamma)\right)$;
      if (*flag* = false) **then**
        $m\leftarrow x$;
        flag $\leftarrow$ true;
      else
        $m\leftarrow\min\{m, x\}$;
      end
    end
    if ($B_2\neq\varnothing$) **then**
      $x\leftarrow 0$;
      if (*flag* = false) **then**
        $m\leftarrow x$;
        flag $\leftarrow$ true;
      else
        $m\leftarrow\min\{m, x\}$;
      end

end
if ($B_3 \neq \varnothing$) **then**
$x \leftarrow \min\limits_{\gamma \in B_3}\left(\varphi_0(\gamma) - \varphi_{\min}^{(\nu_0 - \nu)}(\gamma) - \delta_0\right)$;
if (*flag* = false) **then**
$m \leftarrow x$;
flag $\leftarrow$ true;
else
$m \leftarrow \min\{m, x\}$;
end
end
end
end
if (*flag* = true) **then**
$\rho_L^{a,k}(x_0, y_0) \leftarrow m$;
else
$\rho_L^{a,k}(x_0, y_0)$ не определена;
end

Время выполнения алгоритма — $O(M(\nu_0 + 1))$, где $M = k - a + 1$.

Рассмотрим случай $L = \left(\delta_0, \nu_0, \delta_0'\right)$.

Если $\nu_0 = k - a + 1$, то $\Phi_L^{a,k} = \Phi_{\delta_0'}^{a,k}$, и случай $L = \left(\delta_0, \nu_0, \delta_0'\right)$ сводится к случаю $L = \left(\delta_0', 0, \infty\right)$.

Далее будем рассматривать случай $0 \le \nu_0 < k - a + 1$.

Предложение 20. Пусть $L = \left(\delta_0, \nu_0, \delta_0'\right)$.

$$C_L(\gamma) = \bigcup_{\nu=0}^{\nu_0}\left(\left\{c \mid \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0 \le c \le \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0\right\} \cap \left\{c \mid \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0' \le c \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'\right\}\right).$$

Из предложения 20 следует, что

$$\min_{c \in C_L(\gamma)} \left|\varphi_0(\gamma) - c\right| = \min_{0 \le \nu \le \nu_0} \min_{\substack{c \in \left[\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0, \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0\right] \cap \\ \cap \left[\varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0', \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'\right]}} \left|\varphi_0(\gamma) - c\right|,$$

$$\rho_L^{a,k}(x_0, y_0) = \min_{0 \le \nu \le \nu_0} \min_{\substack{\gamma \in \mathrm{R} \\ \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0 \le \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0 \\ \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0' \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'}} \min_{\substack{c \in \left[\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0, \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0\right] \cap \\ \cap \left[\varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0', \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'\right]}} \left|\varphi_0(\gamma) - c\right|.$$

По предложению 18,

$$\min_{\substack{c \in \left[\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0, \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0\right] \cap \\ \cap \left[\varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0', \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'\right]}} \left|\varphi_0(\gamma) - c\right| = \begin{cases} c_1 - \varphi_0(\gamma), \varphi_0(\gamma) \le c_1, \\ 0, c_1 \le \varphi_0(\gamma) \le c_2, \\ \varphi_0(\gamma) - c_2, \varphi_0(\gamma) \ge c_2, \end{cases}$$

где $\left[\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0, \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0\right] \cap \left[\varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0', \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'\right] = [c_1, c_2]$.

Если $\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0 \le \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0'$, то $c_1 = \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0'$.

Если $\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0 \ge \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0'$, то $c_1 = \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0$.

Если $\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0 \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'$, то $c_2 = \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0$.

Если $\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0 \ge \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'$, то $c_2 = \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'$.

Приведём алгоритм вычисления $\rho_L^{a,k}(x_0, y_0)$ для случая $L = \left(\delta_0, \nu_0, \delta_0'\right)$.

Алгоритм 14.
flag $\leftarrow$ false;
for $\nu \leftarrow 0$ **to** ν_0 **do**
  for $I \leftarrow (-\infty, \gamma''],\ [\gamma', \gamma''],\ [\gamma', +\infty)$ **do**
  // промежутки, на которых функции $\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma),\ \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma),\ \varphi_{\max}(\gamma),\ \varphi_{\min}(\gamma)$
  // являются линейными
    $A \leftarrow I \cap \left\{\gamma \mid \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0 \le \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0\right\} \cap \left\{\gamma \mid \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0' \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'\right\}$;
    $B_1 \leftarrow A \cap \left\{\gamma \mid \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0 \le \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0'\right\} \cap \left\{\gamma \mid \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0 \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'\right\}$;
    $B_2 \leftarrow A \cap \left\{\gamma \mid \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0 \le \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0'\right\} \cap \left\{\gamma \mid \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0 \ge \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'\right\}$;
    $B_3 \leftarrow A \cap \left\{\gamma \mid \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0 \ge \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0'\right\} \cap \left\{\gamma \mid \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0 \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'\right\}$;
    $B_4 \leftarrow A \cap \left\{\gamma \mid \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0 \ge \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0'\right\} \cap \left\{\gamma \mid \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0 \ge \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'\right\}$;
    $D_1 \leftarrow B_1 \cap \left\{\gamma \mid \varphi_0(\gamma) \le \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0'\right\}$;
    $D_2 \leftarrow B_1 \cap \left\{\gamma \mid \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0' \le \varphi_0(\gamma) \le \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0\right\}$;
    $D_3 \leftarrow B_1 \cap \left\{\gamma \mid \varphi_0(\gamma) \ge \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0\right\}$;
    $E_1 \leftarrow B_2 \cap \left\{\gamma \mid \varphi_0(\gamma) \le \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0'\right\}$;
    $E_2 \leftarrow B_2 \cap \left\{\gamma \mid \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0' \le \varphi_0(\gamma) \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'\right\}$;
    $E_3 \leftarrow B_2 \cap \left\{\gamma \mid \varphi_0(\gamma) \ge \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'\right\}$;
    $F_1 \leftarrow B_3 \cap \left\{\gamma \mid \varphi_0(\gamma) \le \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0\right\}$;
    $F_2 \leftarrow B_3 \cap \left\{\gamma \mid \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0 \le \varphi_0(\gamma) \le \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0\right\}$;
    $F_3 \leftarrow B_3 \cap \left\{\gamma \mid \varphi_0(\gamma) \ge \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0\right\}$;
    $G_1 \leftarrow B_4 \cap \left\{\gamma \mid \varphi_0(\gamma) \le \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0\right\}$;
    $G_2 \leftarrow B_4 \cap \left\{\gamma \mid \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0 \le \varphi_0(\gamma) \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'\right\}$;
    $G_3 \leftarrow B_4 \cap \left\{\gamma \mid \varphi_0(\gamma) \ge \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'\right\}$;
    if ($D_1 \ne \varnothing$) **then**
      $x \leftarrow \min\limits_{\gamma \in D_1}\left(\varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0' - \varphi_0(\gamma)\right)$;
      if (*flag* = false) **then**
        $m \leftarrow x$;
        flag $\leftarrow$ true;
      else
        $m \leftarrow \min\{m, x\}$;
      end
    end
    if ($D_2 \ne \varnothing$) **then**
      $x \leftarrow 0$;
      if (*flag* = false) **then**
        $m \leftarrow x$;
        flag $\leftarrow$ true;
      else
        $m \leftarrow \min\{m, x\}$;

        end
end
if ($D_3 \neq \emptyset$) **then**
        $x \leftarrow \min_{\gamma \in D_3}\left(\varphi_0(\gamma) - \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0\right);$
        if (*flag* = false) **then**
                $m \leftarrow x$;
                flag ← true;
        else
                $m \leftarrow \min\{m, x\}$;
        end
end
if ($E_1 \neq \emptyset$) **then**
        $x \leftarrow \min_{\gamma \in E_1}\left(\varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0' - \varphi_0(\gamma)\right);$
        if (*flag* = false) **then**
                $m \leftarrow x$;
                flag ← true;
        else
                $m \leftarrow \min\{m, x\}$;
        end
end
if ($E_2 \neq \emptyset$) **then**
        $x \leftarrow 0$;
        if (*flag* = false) **then**
                $m \leftarrow x$;
                flag ← true;
        else
                $m \leftarrow \min\{m, x\}$;
        end
end
if ($E_3 \neq \emptyset$) **then**
        $x \leftarrow \min_{\gamma \in E_3}\left(\varphi_0(\gamma) - \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'\right);$
        if (*flag* = false) **then**
                $m \leftarrow x$;
                flag ← true;
        else
                $m \leftarrow \min\{m, x\}$;
        end
end
if ($F_1 \neq \emptyset$) **then**
        $x \leftarrow \min_{\gamma \in F_1}\left(\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0 - \varphi_0(\gamma)\right);$
        if (*flag* = false) **then**
                $m \leftarrow x$;
                flag ← true;
        else
                $m \leftarrow \min\{m, x\}$;
        end
end
if ($F_2 \neq \emptyset$) **then**

```
                x ← 0;
                if (flag = false) then
                    m ← x;
                    flag ← true;
                else
                    m ← min{m, x};
                end
            end
            if (F_3 ≠ ∅) then
                x ← \min_{\gamma \in F_3}\left(\varphi_0(\gamma) - \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) + \delta_0\right);
                if (flag = false) then
                    m ← x;
                    flag ← true;
                else
                    m ← min{m, x};
                end
            end
            if (G_1 ≠ ∅) then
                x ← \min_{\gamma \in G_1}\left(\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \delta_0 - \varphi_0(\gamma)\right);
                if (flag = false) then
                    m ← x;
                    flag ← true;
                else
                    m ← min{m, x};
                end
            end
            if (G_2 ≠ ∅) then
                x ← 0;
                if (flag = false) then
                    m ← x;
                    flag ← true;
                else
                    m ← min{m, x};
                end
            end
            if (G_3 ≠ ∅) then
                x ← \min_{\gamma \in G_3}\left(\varphi_0(\gamma) - \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0'\right);
                if (flag = false) then
                    m ← x;
                    flag ← true;
                else
                    m ← min{m, x};
                end
            end
        end
    end
if (flag = true) then
    \rho_L^{a,k}(x_0, y_0) ← m;
else
```

$\rho_L^{a,k}(x_0, y_0)$ не определена;

end

Время выполнения алгоритма — $O(M(\nu_0+1))$, где $M = k - a + 1$.

2.17. Вычисление $\mu_{\delta_0,\Delta_0}^{a,k}(x_0, y_0)$

Требуется вычислить значение величины

$$\mu_{\delta_0,\Delta_0}^{a,k}(x_0, y_0) = \min_{(\gamma,c):\delta(x_0,y_0,\gamma,c)\le\Delta_0} V_{\delta_0}^{a,k}(\gamma, c).$$

Обозначим

$$C^0_{x_0,y_0,\Delta_0}(\gamma) = \{c \mid \delta(x_0, y_0, \gamma, c) \le \Delta_0\} = \{c \mid |\varphi_0(\gamma) - c| \le \Delta_0\}.$$

$$\mu_{\delta_0,\Delta_0}^{a,k}(x_0, y_0) = \min_{(\gamma,c):\delta(x_0,y_0,\gamma,c)\le\Delta_0} \left\{0 \le \mu \le k-a+1 \mid \operatorname{max}_{\substack{\mu+1 \\ a\le r\le k}} \delta(x_r, y_r, \gamma, c) \le \delta_0\right\} =$$

$$= \min\left\{0 \le \mu \le k-a \mid \min_{\gamma\in\mathrm{R}} \min_{c\in C^0_{x_0,y_0,\Delta_0}(\gamma)} \operatorname{max}_{\substack{\mu+1 \\ a\le r\le k}} \left|p_\gamma(x_r, y_r) - c\right| \le \delta_0\right\} =$$

$$= \min\left\{0 \le \mu \le k-a \mid \min_{\gamma\in\mathrm{R}} \min_{c\in C^0_{x_0,y_0,\Delta_0}(\gamma)} \min_{0\le\nu\le\mu} \max\left\{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - c, c - \varphi_{\min}^{(\mu-\nu)}(\gamma)\right\} \le \delta_0\right\} =$$

$$= \min\left\{0 \le \mu \le k-a \mid \min_{0\le\nu\le\mu} \min_{\gamma\in\mathrm{R}} \min_{c\in[\varphi_0(\gamma)-\Delta_0, \varphi_0(\gamma)+\Delta_0]} \max\left\{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - c, c - \varphi_{\min}^{(\mu-\nu)}(\gamma)\right\} \le \delta_0\right\}.$$

По предложению 17,

$$\min_{c\in[\varphi_0(\gamma)-\Delta_0, \varphi_0(\gamma)+\Delta_0]} \max\left\{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - c, c - \varphi_{\min}^{(\mu-\nu)}(\gamma)\right\} =$$

$$= \begin{cases} \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \varphi_0(\gamma) - \Delta_0, & \dfrac{\varphi_{\min}^{(\mu-\nu)}(\gamma) + \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2} \ge \varphi_0(\gamma) + \Delta_0, \\ \dfrac{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \varphi_{\min}^{(\mu-\nu)}(\gamma)}{2}, & \varphi_0(\gamma) - \Delta_0 \le \dfrac{\varphi_{\min}^{(\mu-\nu)}(\gamma) + \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2} \le \varphi_0(\gamma) + \Delta_0, \\ \varphi_0(\gamma) - \Delta_0 - \varphi_{\min}^{(\mu-\nu)}(\gamma), & \dfrac{\varphi_{\min}^{(\mu-\nu)}(\gamma) + \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2} \le \varphi_0(\gamma) - \Delta_0. \end{cases}$$

Приведём алгоритм вычисления $\mu_{\delta_0,\Delta_0}^{a,k}(x_0, y_0)$.

Алгоритм 15.

for $\mu \leftarrow 0$ **to** $k - a$ **do**

 $flag \leftarrow$ false;

 for $\nu \leftarrow 0$ **to** μ **do**

  for $I \leftarrow (-\infty, \gamma'']$, $[\gamma', \gamma'']$, $[\gamma', +\infty)$ **do**

  // промежутки, на которых функции $\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)$, $\varphi_{\min}^{(\mu-\nu)}(\gamma)$

  // являются линейными

   $$B_1 \leftarrow I \cap \left\{\gamma \mid \frac{\varphi_{\min}^{(\mu-\nu)}(\gamma) + \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2} \ge \varphi_0(\gamma) + \Delta_0\right\};$$

   $$B_2 \leftarrow I \cap \left\{\gamma \mid \varphi_0(\gamma) - \Delta_0 \le \frac{\varphi_{\min}^{(\mu-\nu)}(\gamma) + \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2} \le \varphi_0(\gamma) + \Delta_0\right\};$$

   $$B_3 \leftarrow I \cap \left\{\gamma \mid \frac{\varphi_{\min}^{(\mu-\nu)}(\gamma) + \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2} \le \varphi_0(\gamma) - \Delta_0\right\};$$

   if ($B_1 \ne \varnothing$) **then**

    $x \leftarrow \min_{\gamma\in B_1}\left(\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \varphi_0(\gamma) - \Delta_0\right)$;

    if ($flag$ = false) **then**

     $m \leftarrow x$;

flag ← true;
else
$m \leftarrow \min\{m, x\}$;
end
end
if ($B_2 \neq \varnothing$) **then**
$$x \leftarrow \min_{\gamma \in B_2} \frac{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \varphi_{\min}^{(\mu-\nu)}(\gamma)}{2};$$
if (*flag* = false) **then**
$m \leftarrow x$;
flag ← true;
else
$m \leftarrow \min\{m, x\}$;
end
end
if ($B_3 \neq \varnothing$) **then**
$$x \leftarrow \min_{\gamma \in B_3} \left(\varphi_0(\gamma) - \Delta_0 - \varphi_{\min}^{(\mu-\nu)}(\gamma)\right);$$
if (*flag* = false) **then**
$m \leftarrow x$;
flag ← true;
else
$m \leftarrow \min\{m, x\}$;
end
end
end
end
if ($m \leq \delta_0$) **then**
$\mu_{\delta_0,\Delta_0}^{a,k}(x_0, y_0) \leftarrow \mu$;
break;
end
end

Замечание. При вычислениях нужно предусмотреть нахождение минимума линейной функции на полубесконечном промежутке.

Время выполнения алгоритма — $O(M^3)$, где $M = k - a + 1$.

2.18. Вычисление множества Γ_L

Требуется вычислить множество
$$\Gamma_L = \{\gamma \mid \exists c : (\gamma, c) \in \Phi_L\},$$
где
$$\Phi_L = \left\{(\gamma, c) \mid \left(\max_{a \leq r \leq b} \delta(x_r, y_r, \gamma, c) \leq \delta_0'\right) \wedge \left(\max_{a \leq r \leq b}{}_{\nu_0+1} \delta(x_r, y_r, \gamma, c) \leq \delta_0\right)\right\}.$$

Рассмотрим случай $L = (\delta_0, \nu_0, \infty)$.

В этом случае
$$\Phi_L = \left\{(\gamma, c) \mid \max_{a \leq r \leq b}{}_{\nu_0+1} \delta(x_r, y_r, \gamma, c) \leq \delta_0\right\}.$$

Если $\nu_0 = b - a + 1$, то $\Phi_L = \mathrm{R}^2$ и $\Gamma_L = (-\infty, +\infty)$.

Далее будем рассматривать случай $0 \leq \nu_0 < b - a + 1$.

Заметим, что

$$\Gamma_L = \left\{ \gamma \mid \min_{c\in\mathrm{R}} \max_{a\le r\le b}{}_{\nu_0+1} \delta(x_r, y_r, \gamma, c) \le \delta_0 \right\} = \left\{ \gamma \mid \min_{c\in\mathrm{R}} \max_{a\le r\le b}{}_{\nu_0+1} \left| p_\gamma(x_r, y_r) - c \right| \le \delta_0 \right\} =$$

$$= \left\{ \gamma \mid \frac{1}{2} \min_{0\le\nu\le\nu_0} \left(\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) \right) \le \delta_0 \right\}.$$

Обозначим

$$\Gamma_L^{(\nu)} = \left\{ \gamma \mid \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) \le 2\delta_0 \right\}.$$

Тогда

$$\Gamma_L = \bigcup_{\nu=0}^{\nu_0} \Gamma_L^{(\nu)}.$$

Приведём алгоритм вычисления множества Γ_L для случая $L = (\delta_0, \nu_0, \infty)$.

Алгоритм 16.

for $\nu \leftarrow 0$ **to** ν_0 **do**

  $A \leftarrow \varnothing$;

  for $I \leftarrow (-\infty, \gamma''], [\gamma', \gamma''], [\gamma', +\infty)$ **do**

  // промежутки, на которых функции $\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)$, $\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)$

  // являются линейными

    $A \leftarrow A \cup \left(I \cap \left\{ \gamma \mid \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) \le 2\delta_0 \right\} \right)$;

  end

  $\Gamma_L^{(\nu)} \leftarrow A$;

end

$\Gamma_L \leftarrow \bigcup_{\nu=0}^{\nu_0} \Gamma_L^{(\nu)}$;

Время выполнения алгоритма — $O(M(\nu_0 + 1))$, где $M = b - a + 1$.

Рассмотрим случай $L = \left(\delta_0, \nu_0, \delta_0{}' \right)$.

Если $\nu_0 = b - a + 1$, то $\Phi_L = \Phi_{\delta_0{}'}$, и случай $L = \left(\delta_0, \nu_0, \delta_0{}' \right)$ сводится к случаю $L = \left(\delta_0{}', 0, \infty \right)$.

Далее будем рассматривать случай $0 \le \nu_0 < b - a + 1$.

Заметим, что

$$\Gamma_L = \left\{ \gamma \mid \min_{c\in C_{\delta_0{}'}(\gamma)} \max_{a\le r\le b}{}_{\nu_0+1} \delta(x_r, y_r, \gamma, c) \le \delta_0 \right\} = .$$

$$= \left\{ \gamma, \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0{}' \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0{}' \mid \min_{c\in\left[\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}', \varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}'\right]} \max_{a\le r\le b}{}_{\nu_0+1} \left| p_\gamma(x_r, y_r) - c \right| \le \delta_0 \right\} =$$

$$= \left\{ \gamma, \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0{}' \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0{}' \mid \min_{0\le\nu\le\nu_0} \min_{c\in\left[\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}', \varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}'\right]} \max\left\{ \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - c, c - \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) \right\} \le \delta_0 \right\}$$

Обозначим

$$\Gamma_L^{(\nu)} = \left\{ \gamma, \varphi_{\max}(\gamma) - \delta_0{}' \le \varphi_{\min}(\gamma) + \delta_0{}' \mid \min_{c\in\left[\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}', \varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}'\right]} \max\left\{ \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - c, c - \varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma) \right\} \le \delta_0 \right\}$$

Тогда

$$\Gamma_L = \bigcup_{\nu=0}^{\nu_0} \Gamma_L^{(\nu)}.$$

По предложению 17,

$$\min_{c\in\left[\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}',\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}'\right]}\max\left\{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-c, c-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)\right\}=$$

$$=\begin{cases}\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\varphi_{\min}(\gamma)-\delta_0{}', \dfrac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2}\geq\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}',\\ \dfrac{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)}{2}, \varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}'\leq\dfrac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2}\leq\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}',\\ \varphi_{\max}(\gamma)-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)-\delta_0{}', \dfrac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2}\leq\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}'.\end{cases}$$

Приведём алгоритм вычисления множества Γ_L для случая $L=\left(\delta_0,\nu_0,\delta_0{}'\right)$.

Алгоритм 17.

for $\nu\leftarrow 0$ **to** ν_0 **do**

$D\leftarrow\varnothing$;

for $I\leftarrow(-\infty,\gamma'']$, $[\gamma',\gamma'']$, $[\gamma',+\infty)$ **do**

// промежутки, на которых функции $\varphi_{\max}(\gamma)$, $\varphi_{\min}(\gamma)$, $\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)$, $\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)$

// являются линейными

$A\leftarrow\left\{\gamma\mid\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}'\leq\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}'\right\}$;

$B_1\leftarrow A\cap\left\{\gamma\mid\dfrac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2}\geq\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}'\right\}$;

$B_2\leftarrow A\cap\left\{\gamma\mid\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}'\leq\dfrac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2}\leq\varphi_{\min}(\gamma)+\delta_0{}'\right\}$;

$B_3\leftarrow A\cap\left\{\gamma\mid\dfrac{\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)+\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)}{2}\leq\varphi_{\max}(\gamma)-\delta_0{}'\right\}$;

$D_1\leftarrow B_1\cap\left\{\gamma\mid\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\varphi_{\min}(\gamma)-\delta_0{}'\leq\delta_0\right\}$;

$D_2\leftarrow B_2\cap\left\{\gamma\mid\dfrac{\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)}{2}\leq\delta_0\right\}$;

$D_3\leftarrow B_3\cap\left\{\gamma\mid\varphi_{\max}(\gamma)-\varphi_{\min}^{(\nu_0-\nu)}(\gamma)-\delta_0{}'\leq\delta_0\right\}$;

$D\leftarrow D\cup D_1\cup D_2\cup D_3$;

end

$\Gamma_L^{(\nu)}\leftarrow D$;

end

$\Gamma_L\leftarrow\bigcap_{\nu=0}^{\nu_0}\Gamma_L^{(\nu)}$;

Время выполнения алгоритма — $O(M(\nu_0+1))$, где $M = b - a + 1$.

2.19. Вычисление множества J_L

Требуется вычислить множество

$$J_L = \max I_L,$$

где

$$I_L=\left\{[a...b]\in T\mid\left(\delta_{\min}^{a,b}\left(\nu_0,\delta_0{}'\right)\text{определена}\right)\wedge\left(\delta_{\min}^{a,b}\left(\nu_0,\delta_0{}'\right)\leq\delta_0\right)\right\},$$

$$T=\{[a...b]\mid b-a+1\geq 3\}.$$

Справедливо равенство:

$$J_L = \{[a...b] \in I_L \mid \forall [a'...b'] \in I_L : [a...b] \le [a'...b'] \Leftrightarrow [a...b] = [a'...b']\}.$$

Приведём алгоритм вычисления множества J_L.

Алгоритм 18.

$A \leftarrow \varnothing$;

for $a \leftarrow 1$ **to** n **do**

  for $b \leftarrow a + \max\{2,\ \nu_0 - 1\}$ **to** n **do**

    if $\left(\left(\delta_{\min}^{a,b}\left(\nu_0, \delta_0'\right) \text{ определена}\right) \wedge \left(\delta_{\min}^{a,b}\left(\nu_0, \delta_0'\right) \le \delta_0\right) \wedge\right.$

    $\wedge\left((a = 1) \vee \neg\left(\left(\delta_{\min}^{a-1,b}\left(\nu_0, \delta_0'\right) \text{ определена}\right) \wedge \left(\delta_{\min}^{a-1,b}\left(\nu_0, \delta_0'\right) \le \delta_0\right)\right)\right) \wedge$

    $\left.\wedge\left((b = n) \vee \neg\left(\left(\delta_{\min}^{a,b+1}\left(\nu_0, \delta_0'\right) \text{ определена}\right) \wedge \left(\delta_{\min}^{a,b+1}\left(\nu_0, \delta_0'\right) \le \delta_0\right)\right)\right)\right)$ **then**

      $A \leftarrow A \cup [a...b]$;

    end

  end

end

$J_L \leftarrow A$;

Время выполнения алгоритма — $O\left(n^3\left(\nu_0 + 1\right)\right)$.

Заключение

Таким образом, в ходе выполнения работы:

- разработан алгоритм вычисления $\delta_{\min}\left(\nu_0, \delta_0'\right)$;
- разработан алгоритм вычисления $\nu_{\min}\left(\delta_0, \delta_0'\right)$;
- разработан алгоритм вычисления $\rho_L^{a,k}\left(x_0, y_0\right)$;
- разработан алгоритм вычисления $\mu_{\delta_0,\Delta_0}^{a,k}\left(x_0, y_0\right)$;
- разработан алгоритм вычисления множества Γ_L;
- разработан алгоритм вычисления множества J_L.