

Федеральное агентство по образованию РФ
Дальневосточный федеральный университет
Институт математики и компьютерных наук
Кафедра информатики

КЛАСТЕРИЗАЦИЯ ЭМПИРИЧЕСКИХ ДАННЫХ
РАНГОВЫМ МЕТОДОМ

Курсовая работа
студента 248 группы
Гренкина Г. В.
Руководитель:
ст. преподаватель кафедры информатики
Черныш Е. В.

Владивосток, 2011

Содержание

Содержание	2
Аннотация	3
1. Введение	3
1.1. Описание предметной области	3
1.2. Неформальная постановка задачи	7
1.3. Обзор существующих методов решения	7
2. Математические методы	8
2.1. Математическая модель	8
2.2. Относительное количество аномальных точек	17
2.3. Учёт погрешности исходных данных	17
2.4. План	17
2.5. Выпуклая оболочка	18
Алгоритм Грэхема	19
Алгоритм Джарвиса	20
2.6. Многочлен наилучшего равномерного приближения	21
2.7. Вычисление $\delta_{\min}(0, \infty)$	22
2.8. Оператор проектирования	23
2.9. Вычисление $\delta_{\min}(0, \infty)$ (продолжение)	24
2.10. Вычисление матрицы $\{\delta_{\min}^{a,b}(0, \infty)\}_{[a..b] \in T}$	41
2.11. Вычисление $\delta_{\min}(v_0, \infty)$	42
2.12. Кубические сплайны класса C^2	49
2.13. Альтернативные методы	50
Функционал качества разбиения	50
Сплайн-функции	51
Заключение	52
Список литературы	52
Приложения	54
Приложение А. Применение рангового метода кластеризации для анализа результатов всероссийской олимпиады школьников по информатике	54

Аннотация

В данной работе рассматривается задача кластеризации эмпирических данных ранговым методом, основанным на модифицированном В. П. Масловым законе Ципфа. Разработаны численные алгоритмы. Получено обобщение алгоритма Грэхема построения выпуклой оболочки. Также предложены альтернативные методы, в том числе метод, использующий сплайн-функции.

1. Введение

1.1. Описание предметной области

Задача классификации объектов заключается в том, чтобы всю анализируемую совокупность объектов $\{O_i\}_{i=1}^n$, статистически представленную в виде таблицы «объект-свойство» (см. ниже), разбить на сравнительно небольшое число однородных, в определённом смысле, групп или классов [1].

Таблица «объект-свойство» имеет вид

Свойство Объект	1	2	...	p
1	$x_1^{(1)}$	$x_1^{(2)}$...	$x_1^{(p)}$
2	$x_2^{(1)}$	$x_2^{(2)}$...	$x_2^{(p)}$
...
n	$x_n^{(1)}$	$x_n^{(2)}$...	$x_n^{(p)}$

Здесь $X_i = (x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \dots, x_i^{(p)})$ — вектор значений признаков (свойств) $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(p)}$, зарегистрированных на i -м объекте. Этот вектор удобно представить в виде точки в p -мерном признаковом пространстве с координатными осями $Ox^{(1)}, Ox^{(2)}, \dots, Ox^{(p)}$.

Естественно предположить, что геометрическая близость точек в этом пространстве означает близость «физических» состояний соответствующих объектов, их однородность. Тогда задача классификации состоит в разбиении совокупности точек на сравнительно небольшое число классов таким образом, чтобы объекты, принадлежащие одному классу, находились бы на сравнительно небольших расстояниях друг от друга. Полученные в результате разбиения классы часто называют *кластерами*, а методы их нахождения кластер-анализом [1].

Наиболее трудным и наименее формализованным в задаче кластеризации является момент, связанный с определением однородности объектов. Понятие однородности объектов определяется заданием функции $d(O_i, O_j)$, характеризующей расстояние между объектами O_i и O_j . Близкие в смысле этой метрики объекты считаются однородными, принадлежащими к одному классу. При этом необходимо сопоставление $d(O_i, O_j)$ с некоторым пороговым значением, определяемым в каждом конкретном случае по-своему [1].

Выбор метрики является узловым моментом исследования. От выбора метрики решающим образом зависит окончательный вариант разбиения объектов на классы при заданном алгоритме разбиения. В каждой конкретной задаче этот выбор должен производиться по-своему [1].

Примеры метрик:

1. Евклидово расстояние:

$$d(X, Y) = \sqrt{(x^{(1)} - y^{(1)})^2 + (x^{(2)} - y^{(2)})^2 + \dots + (x^{(p)} - y^{(p)})^2}.$$

2. Манхэттенская метрика:

$$d(X, Y) = |x^{(1)} - y^{(1)}| + |x^{(2)} - y^{(2)}| + \dots + |x^{(p)} - y^{(p)}|.$$

При конструировании различных процедур кластеризации в ряде ситуаций оказывается целесообразным введение понятия расстояния между целыми группами объектов [1].

Пусть S_i — i -я группа (класс, кластер) объектов. Примеры расстояний между кластерами:

а) Расстояние, измеряемое по принципу «ближнего соседа»:

$$\rho(S_i, S_j) = \min_{X \in S_i, Y \in S_j} d(X, Y).$$

б) Расстояние, измеряемое по принципу «дальнего соседа»:

$$\rho(S_i, S_j) = \max_{X \in S_i, Y \in S_j} d(X, Y).$$

Математическая постановка задачи кластеризации требует формализации понятия «качество разбиения». С этой целью в рассмотрение вводится понятие критерия (функционала) качества разбиения $Q(S)$, который задаёт способ сопоставления с каждым возможным разбиением S заданного множества объектов на классы некоторого числа $Q(S)$, оценивающего (в определённой шкале) степень оптимальности данного разбиения. Тогда задача поиска наилучшего разбиения S^* сводится к нахождению экстремума выбранного функционала качества. Выбор того или иного функционала качества, как правило, осуществляется весьма произвольно и опирается скорее на эмпирические и профессионально-интуитивные соображения, чем на какую-либо строгую формализованную систему [1].

В [3] предложен *ранговый метод кластеризации эмпирических данных*. Ниже указано, в чём заключается этот метод.

Для частотных словарей известен закон Ципфа, описывающий соотношение между частотой и рангом слов в словаре. Этот закон обычно рассматривается в логарифмических координатах:

$$\ln r + \frac{1}{D} \ln w_r = \text{const},$$

где r — ранг слова, совпадающий с его номером в частотном словаре по убыванию частоты, w_r — частота встречаемости этого слова в тексте, D — константа [3].

Дж. Ципфом и другими исследователями было установлено, что такому распределению подчиняются не только все естественные языки мира, но и другие явления социального и биологического характера: распределения ученых по числу опубликованных ими статей (А. Лотка, 1926 г.), городов США по численности населения (Дж. Ципф, 1949 г.), населения по размерам дохода в капиталистических странах (В. Парето, 1897 г.), биологических родов по численности видов (Дж. Уиллис, 1922 г.) и др. [16]

Новый подход исследования статистических зависимостей в языке, предложенный В. П. Масловым, позволяет получить более точное соотношение между рангом и частотой [3].

В. П. Масловым были рассмотрены задачи, связанные с анализом экономического риска при покупке товара. В частности, для задачи о числе проданных машин [10] получена теоретическая кривая для числа этих машин N_p по цене, меньшей p :

$$p \cong \alpha \left(\frac{N_p}{N_\infty - N_p} \right)^\gamma, \quad (1)$$

где $(N_\infty - N_p)$ — число автомобилей, проданных по цене, равной или большей p [3].

Выполненные В. П. Масловым исследования показали, что для объектов, объединённых некоторым набором признаков, т. е. для определённой группы или кластера, существуют зависимости между соответствующими переменными модели, например, в виде (1). Тогда существенной характеристикой кластера являются параметры (γ, α) , входящие в эти функциональные зависимости. Если данные следует выделить в несколько кластеров, то способ разбиения можно сформулировать следующим образом: на каждом из кластеров справедлив модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа со своими значениями параметров, которые меняются при переходе от кластера к кластеру. Предварительный анализ показал, что функциональная зависимость (1) наиболее чувствительна к выбору γ . Поэтому естественное разбиение должно быть таковым, что для каждого кластера

существует своё числовое значение степенного параметра γ , характеризующее соответствующий кластер [3].

В [3] данный подход реализован для задач кластеризации медицинских данных.

Первая задача связана с выделением групп медицинских работников скорой помощи по их эмоциональному состоянию. Среди медицинских работников скорой помощи на примере нескольких городов Приморского края было проведено анкетирование, при котором выявлялась самооценка эмоционального состояния каждого работника (диагностика синдрома эмоционального выгорания, далее СЭВ, в структуре профессионально обусловленной патологии). На вопросы предполагались однозначные ответы («да» или «нет»). СЭВ включает три фазы: «напряжение», «резистенция» (сопротивление) и «истощение». По результатам опроса медицинских работников были подготовлены индивидуальные нейропсихические заключения, в которых на каждую фазу приходится некоторое количество баллов (абсолютное значение), рассчитанное по методике диагностики. Задача состоит в том, чтобы для отдельной специальности (врачи, фельдшеры, медицинские сёстры) выявить характерное разбиение на группы и сделать вывод о выраженности каждой фазы эмоционального состояния в группах риска [3].

Вторая задача связана с выявлением групп пациентов, страдающих хроническим заболеванием желудочно-кишечного тракта, по степени тяжести заболевания исходя из показателей различных видов анализа крови [3].

В соответствии со сформулированной выше идеей рангового анализа данные $\{(w_i)\}_{i=1}^n$ упорядочиваются по возрастанию, и каждому значению w ставится в соответствие порядковый номер — ранг r . Исходные данные анализируются с помощью соотношения (1), которое в логарифмических координатах можно записать в виде:

$$\ln w \cong -\gamma \ln \left(\frac{N-r}{r} \right) + c \equiv -\gamma \ln R + c.$$

В [3] для обеспечения неотрицательности логарифма и удобства визуализации данных принято $N = 2n + 1$. Таким образом, естественными переменными для анализа эмпирических данных являются $\ln w$ и $\ln R$. В этих переменных данные разбиваются на кластеры [3].

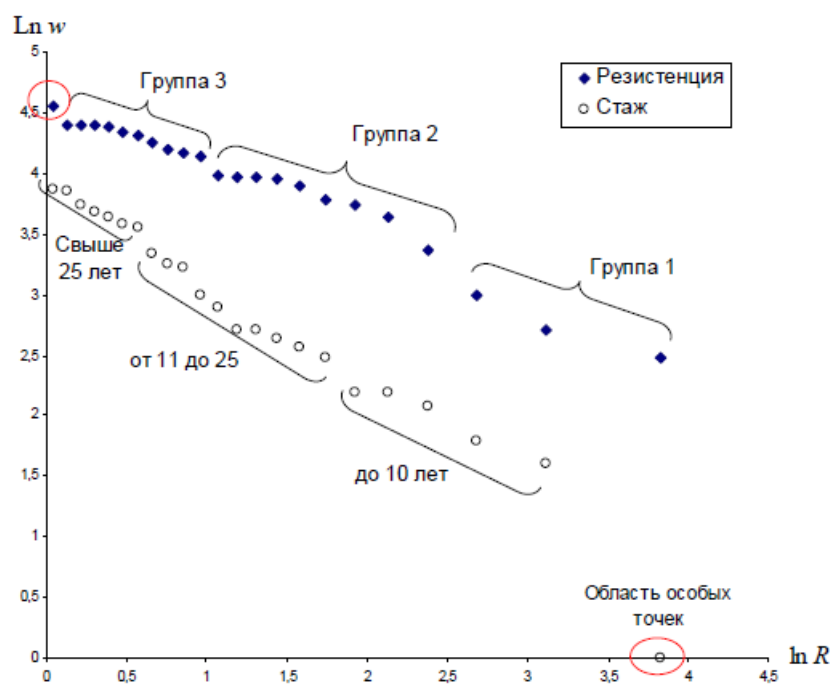


Рис. 1. Выраженность фазы «резистенции» синдрома эмоционального выгорания медицинских сестер по стажу работы

Рис. 1. Рисунок 1 из статьи [3]

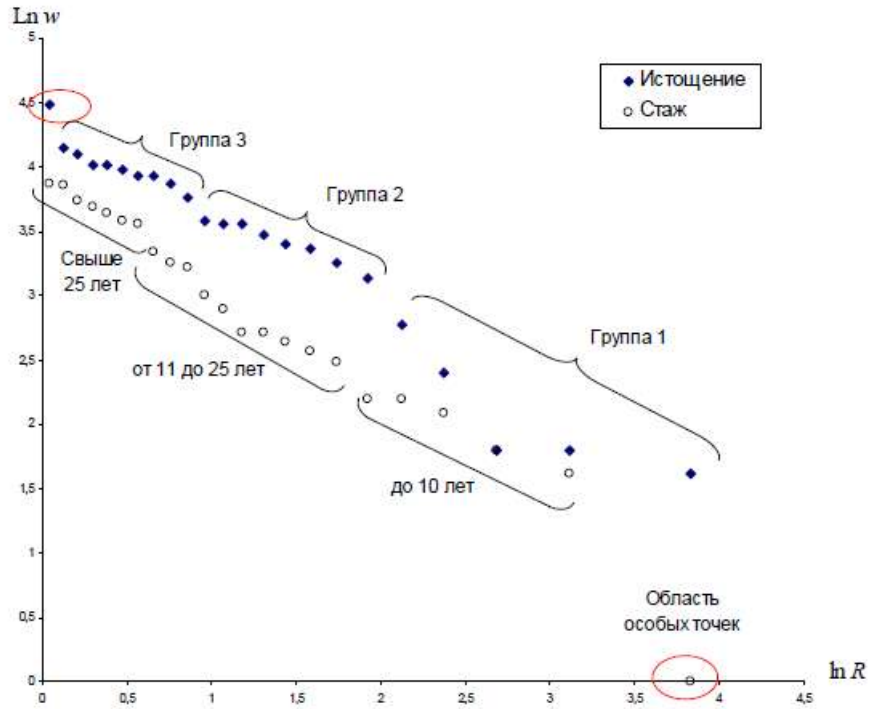


Рис. 2. Выраженность фазы «истощения» синдрома эмоционального выгорания медицинских сестер по стажу работы

Рис. 2. Рисунок 2 из статьи [3]

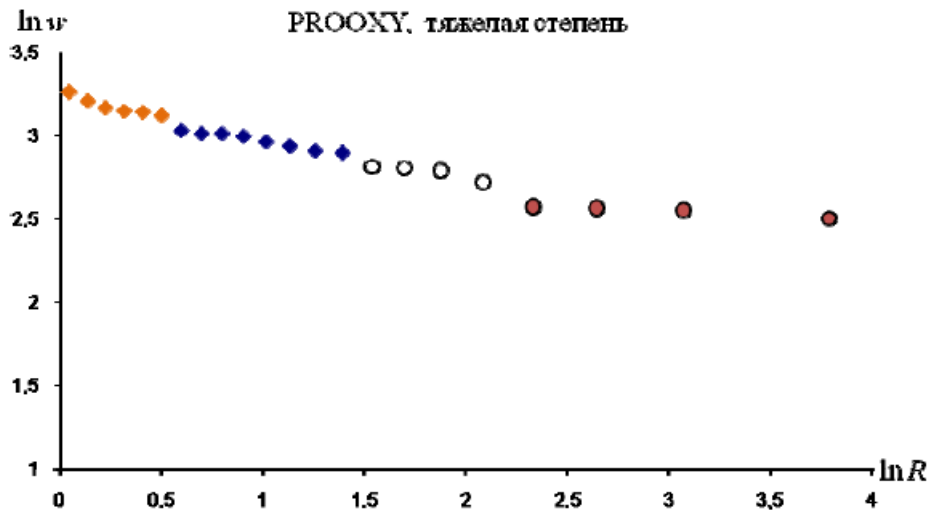


Рис. 3. Кластеризация «тяжелых» пациентов по результатам анализов крови.

Рис. 3. Рисунок 3 из статьи [3]

Задача кластеризации эмпирических данных ранговым методом в той формулировке, которая дана в [3], является нечётко поставленной, т. е. нуждается в уточнении. Для вычислительной реализации рангового метода кластеризации необходимо формализовать исходную постановку задачи. В [2] предложен способ такой формализации.

Формулировка рангового метода представляет собой два требования к искомому разбиению:

- а) на каждом из кластеров справедлив модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа со своими значениями параметров γ и c ;
- б) значения параметров меняются при переходе от кластера к кластеру.

Рассматривается случай, когда кластеры — промежутки без разрывов (в каждом кластере точки имеют последовательные ранги). Накладывается ограничение на минимальное число точек в кластере: в каждом кластере должно быть не менее трёх точек.

Построенная в [2] математическая модель включает в себя две основные части:

- 1) оценка заданного разбиения;
- 2) анализ исходных данных, когда разбиение не задаётся.

Оценка заданного разбиения заключается в проверке для разбиения двух требований (см. выше).

В случае, когда разбиение не задано и его требуется найти, используется так называемое расширение кластеров: задаётся уровень качества промежутка и находится множество максимальных промежутков, которое можно рассматривать как результат решения задачи кластеризации (при выбранном уровне качества промежутка).

1.2. Неформальная постановка задачи

Требуется разработать численные алгоритмы для решения задач, поставленных в [2].

В дальнейшем планируется разработать программную систему, позволяющую решать эти задачи.

Предполагается, что программа будет принимать на вход исходные данные в формате CSV, а также текстовый файл, содержащий описание задач в определённом формате, и выводить результаты решения задач в формате HTML.

1.3. Обзор существующих методов решения

Обычно результатом выполнения процедуры кластеризации является разбиение S^* , доставляющее экстремум некоторому функционалу качества разбиения $Q(S)$. Методы кластеризации, как правило, применяются к многомерным данным. Ввиду многомерности данных, сложно получить подробную информацию об исходных данных, поэтому на выходе процедуры кластеризации получается единственное разбиение (или дерево в случае иерархических методов кластеризации).

Ранговый метод отличается от «традиционных» методов кластеризации. Ранговый метод работает с 1-, 2-мерными данными, что даёт возможность получить более подробную информацию об исходных данных. Ранговый метод позволяет отказаться от субъективно задаваемых метрики и функционала качества разбиения. Предложенная в [2] процедура расширения кластеров даёт не разбиение, а так называемое покрытие — систему пересекающихся классов; исследователь должен сам решать, к какому кластеру отнести точки, входящие в пересечение максимальных промежутков. Исследователю также могут пригодиться матрицы $\left\{ \delta_{\min}^{a,b} \left(\nu_0, \delta_0' \right) \right\}_{[a..b] \in T}$, $\left\{ \nu_{\min}^{a,b} \left(\delta_0, \delta_0' \right) \right\}_{[a..b] \in T}$, чтобы оценить, измерить исходные данные.

При выполнении обзора литературы был найден метод анализа эмпирических данных, похожий на ранговый метод кластеризации.

Частным случаем закона Ципфа является закон Брэдфорда, непосредственно связанный уже не с распределением слов в тексте, а с распределением документов внутри какой-либо тематической области [16].

Основной смысл закономерности состоит в следующем: если научные журналы расположить в порядке убывания числа статей по конкретному вопросу, то журналы в полученном списке можно разбить на три зоны таким образом, чтобы количество статей в каждой зоне по заданному предмету было одинаковым. При этом в первую зону, так называемую зону ядра, входят профильные журналы, непосредственно посвящённые рассматриваемой тематике. Количество профильных журналов в зоне ядра невелико. Вторую

зону образуют журналы, частично посвящённые заданной области, причём число их существенно возрастает по сравнению с числом журналов в ядре. Третья зона, самая большая по количеству изданий, объединяет журналы, тематика которых весьма далека от рассматриваемого предмета.

Таким образом, при равном числе публикаций по определённой тематике в каждой зоне число наименований журналов резко возрастает при переходе от одной зоны к другой. С. Брэдфорд установил, что количество журналов в третьей зоне будет примерно во столько раз больше, чем во второй зоне, во сколько раз число наименований во второй зоне больше, чем в первой.

Обозначим P_1 — число журналов в 1-й зоне, P_2 — во 2-й, P_3 — число журналов в 3-й зоне. Если a — отношение количества журналов 2-й зоны к числу журналов 1-й зоны, то закономерность, вскрытая С. Брэдфордом, может быть записана так:

$$P_1 : P_2 : P_3 = 1 : a : a^2$$

или

$$P_3 : P_2 = P_2 : P_1 = a.$$

Эту зависимость называют законом Брэдфорда.

Б. Викери уточнил модель С. Брэдфорда. Он выяснил, что журналы, проранжированные (выстроенные) в порядке уменьшения в них статей по конкретному вопросу, можно разбить не на три зоны, а на любое нужное число зон. Если периодические издания расположить в порядке уменьшения в них количества статей по конкретному вопросу, то в полученном списке можно выделить ряд зон, каждая из которых содержит одинаковое количество статей. Примем следующие обозначения: x — количество статей в каждой зоне, T_x — количество журналов, содержащих x статей, T_{2x} — количество журналов, содержащих $2x$ статей, т.е. сумма наименований журналов в 1-й и во 2-й зонах, T_{3x} — количество журналов, содержащих $3x$ статей, т.е. сумма наименований журналов в 1-й, 2-й и в 3-й зонах, T_{4x} — количество журналов, содержащих $4x$ статей. Тогда эта закономерность будет иметь вид

$$T_x : T_{2x} : T_{3x} : T_{4x} : \dots = 1 : a : a^2 : a^3 : \dots$$

Данное выражение называют законом Брэдфорда в толковании Б. Викери.

По теме, которая затрагивается в настоящей курсовой работе, ранее был опубликован ряд работ. Описание этих работ см. в [2].

2. Математические методы

2.1. Математическая модель

Исходными данными являются одномерные эмпирические данные — набор положительных чисел w_1, w_2, \dots, w_n .

Исходные данные упорядочиваются по возрастанию, в результате получается числовая последовательность $\{w_r\}_{r=1}^n$, в которой

$$0 < w_1 \leq w_2 \leq \dots \leq w_n.$$

Порядковый номер элемента последовательности носит название ранг и обозначается r .

Пусть задана функция $R(r, n)$, определённая на множестве

$$\{(r, n) \mid n \in \mathbb{N}, r \in \{1, 2, \dots, n\}\},$$

принимающая только положительные значения, такая, что функция $R(\cdot, n)$ строго убывает при любом $n \in \mathbb{N}$.

При фиксированном n функция $R(\cdot, n)$ представляет собой числовую последовательность $\{R_r\}_{r=1}^n$, где $R_r = R(r, n)$, причём

$$R_1 > R_2 > \dots > R_n > 0.$$

Рассмотрим точки промежутка $[a \dots b]$: $\{(\ln R_r, \ln w_r)\}_{r=a}^b$.

Запишем модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа в виде

$$\ln w_r \cong -\gamma \ln R_r + c. \quad (2)$$

Приближённое соотношение (2) означает близость точек $\{(\ln R_r, \ln w_r)\}$ к функциональной зависимости

$$\ln w = l_{\gamma,c}(\ln R) = -\gamma \ln R + c. \quad (3)$$

Дадим модифицированному В. П. Масловым закону Ципфа геометрическую интерпретацию. Рассмотрим точки $\{(\ln R_r, \ln w_r)\}$ в логарифмических координатах $(\ln R, \ln w)$. Графиком функции $\ln w = l_{\gamma,c}(\ln R)$ является прямая с угловым коэффициентом $(-\gamma)$ и начальной ординатой c . Геометрически близость точки $(\ln R_r, \ln w_r)$ к функциональной зависимости (3) означает, что ордината этой точки $\ln w_r$ близка к ординате точки графика функции $\ln w = l_{\gamma,c}(\ln R)$ с абсциссой $\ln R_r$.

Для измерения близости точек к функциональной зависимости (3) введём функцию $\delta(\ln R_0, \ln w_0, \gamma_0, c_0)$ — меру отклонения точки $(\ln R_0, \ln w_0)$ от функциональной зависимости (3) со значениями параметров (γ_0, c_0) .

Например,

$$\delta(\ln R_0, \ln w_0, \gamma_0, c_0) = |\ln w_0 - l_{\gamma_0, c_0}(\ln R_0)| = |\ln w_0 - (-\gamma_0 \ln R_0 + c_0)|. \quad (4)$$

Геометрический смысл данной величины — отклонение точки $(\ln R_0, \ln w_0)$ от прямой

$$\ln w = -\gamma_0 \ln R + c_0 \quad (5)$$

по вертикали (см. рис. 4).

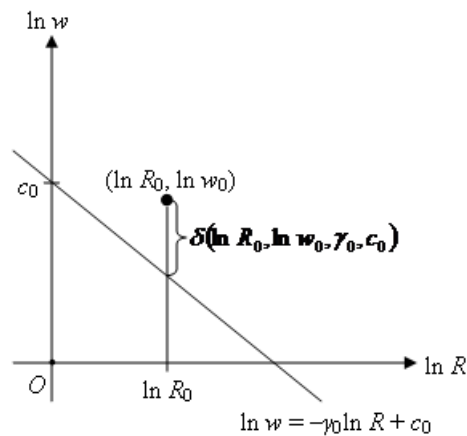


Рис. 4

Введём характеристику близости набора точек $\{(\ln R_r, \ln w_r)\}_{r=a}^b$ к функциональной зависимости (3).

Зададим пороговое значение (порог) δ_0 ($\delta_0 \geq 0$) и потребуем, чтобы

$$\forall r = a, \dots, b : \delta(\ln R_r, \ln w_r, \gamma_0, c_0) \leq \delta_0,$$

или, что то же самое,

$$\max_{a \leq r \leq b} \delta(\ln R_r, \ln w_r, \gamma_0, c_0) \leq \delta_0, \quad (6)$$

и будем считать, что на промежутке $[a \dots b]$ справедлив модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа со значениями параметров (γ_0, c_0) при пороге δ_0 , если выполняется условие (6).

Величина

$$M_0(\gamma_0, c_0) = \max_{a \leq r \leq b} \delta(\ln R_r, \ln w_r, \gamma_0, c_0)$$

характеризует близость набора точек $\{(\ln R_r, \ln w_r)\}_{r=a}^b$ к функциональной зависимости $\ln w = l_{\gamma_0, c_0}(\ln R)$.

Геометрический смысл: $M_0(\gamma_0, c_0)$ — наибольшее из отклонений точек промежутка $[a...b]$ от прямой (5) по вертикали. Также $M_0(\gamma_0, c_0)$ — это половина минимальной высоты полосы со «средней линией» (5), содержащей все точки промежутка $[a...b]$ (см. рис. 5).

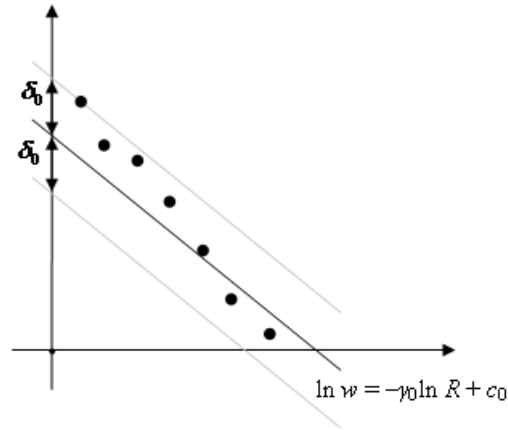


Рис. 5

Введём предикат

$$P_{\delta_0}(\gamma_0, c_0) = (M_0(\gamma_0, c_0) \leq \delta_0),$$

определяющий, справедлив ли на промежутке $[a...b]$ модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа при пороге δ_0 с заданными значениями параметров (γ_0, c_0) .

Рассмотрим множество

$$\Phi_{\delta_0} = \{(\gamma, c) \mid P_{\delta_0}(\gamma, c) = 1\}.$$

Множество Φ_{δ_0} определяет множество функциональных зависимостей вида (3), которые годятся для промежутка $[a...b]$ при пороге δ_0 (справедлив модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа с такими значениями параметров).

Ещё введём в рассмотрение множество

$$\Gamma_{\delta_0} = \{\gamma \mid \exists c : (\gamma, c) \in \Phi_{\delta_0}\} —$$

множество значений параметра γ , которые годятся для промежутка $[a...b]$ при пороге δ_0 .

Теперь «забудем» про пороговое значение. Будем подбирать функциональную зависимость так, чтобы близость набора точек $\{(\ln R_r, \ln w_r)\}_{r=a}^b$ к ней была наилучшей.

Введём величину

$$\delta_{\min}(0, \infty) = \inf_{(\gamma, c) \in \mathbb{R}^2} M_0(\gamma, c) = \inf_{(\gamma, c) \in \mathbb{R}^2} \max_{a \leq r \leq b} \delta(\ln R_r, \ln w_r, \gamma, c).$$

Величина $\delta_{\min}(0, \infty)$ характеризует качество промежутка $[a...b]$.

Геометрический смысл: $\delta_{\min}(0, \infty)$ — это половина наименьшей возможной высоты полосы, содержащей все точки промежутка $[a...b]$.

Введём предикат

$$\Pi_{\delta_0} = (\delta_{\min}(0, \infty) \leq \delta_0),$$

определяющий, справедлив ли на промежутке $[a...b]$ модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа при пороге δ_0 . Заметим, что в случае, когда $\delta_{\min}(0, \infty) = \min_{(\gamma, c) \in \mathbb{R}^2} M_0(\gamma, c)$,

$$\Pi_{\delta_0} = (\exists(\gamma, c) : P_{\delta_0}(\gamma, c) = 1) = (\Phi_{\delta_0} \neq \emptyset).$$

Замечание. В разделе 2.7 показано, что для меры отклонения (4) условие $\delta_{\min}(0, \infty) = \min_{(\gamma, c) \in \mathbb{R}^2} M_0(\gamma, c)$ выполняется.

Пусть T — множество промежутков, количество точек в которых не меньше 3:

$$T = \{[a\dots b] \mid b - a + 1 \geq 3\}.$$

Рассмотрим множество

$$I_{\delta_0} = \{[a\dots b] \in T \mid \Pi_{\delta_0}^{a,b} = 1\} —$$

множество промежутков, на которых справедлив модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа при пороге δ_0 .

Введём на множестве T отношение \leq . Пусть

$$[a_1\dots b_1] \leq [a_2\dots b_2] \Leftrightarrow a_1 \geq a_2, b_1 \leq b_2.$$

Отношение \leq рефлексивно, транзитивно и антисимметрично, т.е. является частичным порядком на T .

Элемент a частично упорядоченного множества A называется *максимальным*, если $a \leq x \Leftrightarrow a = x$ [11]. Множество максимальных элементов множества I_{δ_0} обозначим $J_{\delta_0} = \max I_{\delta_0}$ и назовём *множеством максимальных промежутков при пороге δ_0* . Таким образом,

$$J_{\delta_0} = \{[a\dots b] \in I_{\delta_0} \mid \forall [a'\dots b'] \in I_{\delta_0} : [a\dots b] \leq [a'\dots b'] \Leftrightarrow [a\dots b] = [a'\dots b']\}.$$

Предложение 1. $[a_1\dots b_1] \leq [a_2\dots b_2], [a_2\dots b_2] \in I_{\delta_0} \Rightarrow [a_1\dots b_1] \in I_{\delta_0}$.

Точки $(\ln R_r, \ln w_r)$, для которых

$$\delta(\ln R_r, \ln w_r, \gamma_0, c_0) > \delta_0,$$

назовём *аномальными точками (аномалиями) относительно функциональной зависимости (3) со значениями параметров (γ_0, c_0)* .

Рассмотрим величину

$$V_{\delta_0}(\gamma_0, c_0) = \{r \in \{a, \dots, b\} \mid \delta(\ln R_r, \ln w_r, \gamma_0, c_0) > \delta_0\} —$$

число аномалий промежутка $[a\dots b]$ относительно функциональной зависимости (3) со значениями параметров (γ_0, c_0) при пороге δ_0 .

Пусть $\{z_i\}_{i=1}^s$ — некоторая последовательность неотрицательных чисел и пусть j — натуральное число, удовлетворяющее неравенству $1 \leq j \leq s + 1$. Обозначим

$$\max_j z_i$$

j -й по максимальной элемент последовательности $\{z_i\}_{i=1}^s$ (j -й по порядку элемент в отсортированной по убыванию последовательности $\{z_i\}_{i=1}^s$). В частности, $\max_1 z_i = \max z_i$, $\max_s z_i = \min z_i$. В случае $j = s + 1$ примем $\max_{s+1} z_i = 0$.

Пусть v — целое число, удовлетворяющее неравенству $0 \leq v \leq b - a + 1$. Введём величину

$$M_v(\gamma_0, c_0) = \max_{a \leq r \leq b} \delta(\ln R_r, \ln w_r, \gamma_0, c_0),$$

характеризующую близость набора точек $\{(\ln R_r, \ln w_r)\}_{r=a}^b$ к функциональной зависимости $\ln w = l_{\gamma_0, c_0}(\ln R)$, допуская v аномальных точек.

Геометрический смысл величины $M_v(\gamma_0, c_0)$ — половина наименьшей возможной высоты полосы со «средней линией» (5), содержащей все точки промежутка $[a\dots b]$, кроме v штук точек, которые можно выкинуть (см. рис. 6).

$V_{\delta_0}(\gamma_0, c_0)$ — количество точек промежутка $[a\dots b]$, находящихся вне полосы со «средней линией» (5) высоты $2\delta_0$.

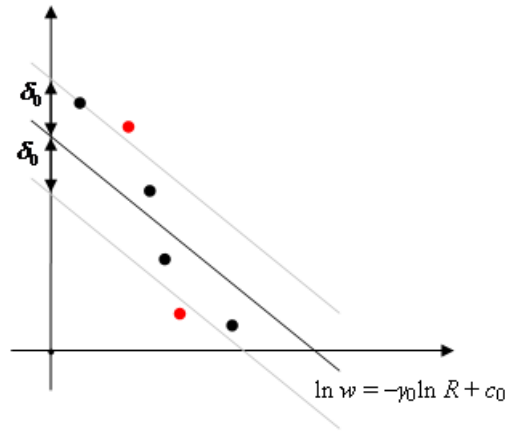


Рис. 6

Зададим дополнительное пороговое значение $\delta'_0 \geq \delta_0$ (δ'_0 может быть равно ∞) и потребуем, чтобы для всех аномальных точек промежутка $[a...b]$ было выполнено неравенство

$$\delta(\ln R_r, \ln w_r, \gamma_0, c_0) \leq \delta'_0. \quad (7)$$

Тройку $L = (\delta_0, \nu_0, \delta'_0)$ назовём *уровнем качества промежутка*.

Заметим, что неравенство (7) выполнено для всех аномальных точек промежутка $[a...b]$ тогда и только тогда, когда

$$M_0(\gamma_0, c_0) \leq \delta'_0.$$

Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать пары значений параметров, принадлежащие множеству

$$\Phi_{\delta'_0} = \{(\gamma, c) \mid M_0(\gamma, c) \leq \delta'_0\}.$$

Введём предикат

$$P_L(\gamma_0, c_0) = ((\gamma_0, c_0) \in \Phi_{\delta'_0}) \wedge (M_{\nu_0}(\gamma_0, c_0) \leq \delta_0) = (M_0(\gamma_0, c_0) \leq \delta'_0) \wedge (M_{\nu_0}(\gamma_0, c_0) \leq \delta_0),$$

определяющий, справедлив ли на промежутке $[a...b]$ модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа на уровне L с заданными значениями параметров (γ_0, c_0) .

Рассмотрим множество

$$\Phi_L = \{(\gamma, c) \mid P_L(\gamma, c) = 1\},$$

которое определяет множество функциональных зависимостей вида (3), которые годятся для промежутка $[a...b]$ на уровне L .

Рассмотрим множество

$$\Gamma_L = \{\gamma \mid \exists c : (\gamma, c) \in \Phi_L\} —$$

множество значений параметра γ , которые годятся для промежутка $[a...b]$ на уровне L .

Введём величину

$$\delta_{\min}(\nu_0, \delta'_0) = \inf_{(\gamma, c) \in \Phi_{\delta'_0}} M_{\nu_0}(\gamma, c) = \inf_{(\gamma, c) \in \Phi_{\delta'_0}} \max_{a \leq r \leq b} \delta(\ln R_r, \ln w_r, \gamma, c),$$

причём если $\Phi_{\delta'_0} = \emptyset$, то величина $\delta_{\min}(\nu_0, \delta'_0)$ не определена. Величина $\delta_{\min}(\nu_0, \delta'_0)$ характеризует качество промежутка $[a...b]$ с допущением ν_0 аномальных точек при дополнительном пороге δ'_0 .

Введём величину

$$v_{\min}(\delta_0, \delta_0') = \min_{(\gamma, c) \in \Phi_{\delta_0'}} V_{\delta_0}(\gamma, c) = \min_{(\gamma, c) \in \Phi_{\delta_0'}} |\{r \in \{a, \dots, b\} \mid \delta(\ln R_r, \ln w_r, \gamma, c) > \delta_0\}|,$$

причём если $\Phi_{\delta_0'} = \emptyset$, то величина $v_{\min}(\delta_0, \delta_0')$ не определена. Величина $v_{\min}(\delta_0, \delta_0')$ также характеризует качество промежутка $[a..b]$ при пороге δ_0 и дополнительном пороге δ_0' .

Введём предикат

$$\Pi_L = \left(\delta_{\min}(v_0, \delta_0') \text{ определена} \right) \wedge \left(\delta_{\min}(v_0, \delta_0') \leq \delta_0 \right),$$

определяющий, справедлив ли на промежутке $[a..b]$ модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа на уровне L . Заметим, что в случае, когда $\delta_{\min}(v_0, \delta_0') = \min_{(\gamma, c) \in \Phi_{\delta_0'}} M_{v_0}(\gamma, c)$,

$$\Pi_L = (\exists(\gamma, c) : P_L(\gamma, c) = 1) = (\Phi_L \neq \emptyset).$$

Укажем геометрический смысл введённых величин.

$P_L(\gamma_0, c_0) = 1$ тогда и только тогда, когда полоса со «средней линией» (5) высоты $2\delta_0$ содержит все точки промежутка $[a..b]$, кроме не более v_0 штук точек, которые содержатся в полосе со «средней линией» (5) высоты $2\delta_0'$ (см. рис. 7).

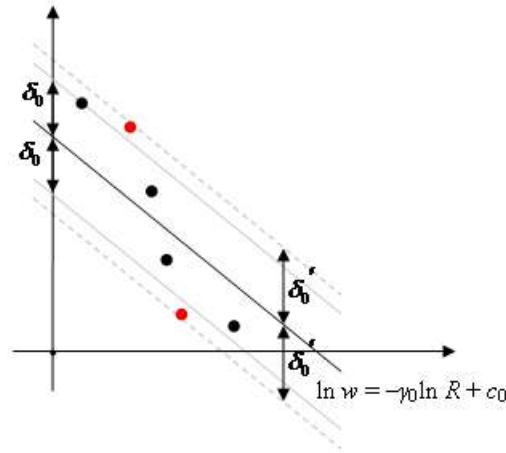


Рис. 7

$\delta_{\min}(v_0, \delta_0')$ — это половина наименьшей возможной высоты полосы, при которой число точек, не попавших в полосу, не превосходит v_0 , причём эти точки содержатся в полосе с такой же «средней линией» высоты $2\delta_0'$.

$v_{\min}(\delta_0, \delta_0')$ — это наименьшее возможное число аномалий при пороге δ_0 и дополнительном пороге δ_0' , т.е. не более $v_{\min}(\delta_0, \delta_0')$ штук точек находятся вне полосы высоты $2\delta_0$, но они содержатся в полосе с такой же «средней линией» высоты $2\delta_0'$.

Рассмотрим множество

$$I_L = \{[a..b] \in T \mid \Pi_L^{a,b} = 1\} —$$

множество промежутков, на которых справедлив модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа на уровне L . Множество

$$J_L = \max I_L$$

назовём *множеством максимальных промежутков на уровне L* .

Предложение 2. $[a_1 \dots b_1] \leq [a_2 \dots b_2] \wedge [a_2 \dots b_2] \in I_L \Rightarrow [a_1 \dots b_1] \in I_L$.

Рассмотрим две задачи:

- 1) оценка заданного разбиения;
- 2) анализ исходных данных, когда разбиение не задаётся.

Рассмотрим некоторое разбиение данных на кластеры:

$$S = \{[1 \dots m_1], [m_1 + 1 \dots m_2], [m_2 + 1 \dots m_3], \dots, [m_{K-1} + 1 \dots n]\}, \quad (8)$$

$$m_0 = 0, m_K = n, m_i - m_{i-1} \geq 3, i = 1, 2, \dots, K, \quad (9)$$

K — число кластеров разбиения.

Нужно оценить это разбиение, т. е. определить, в какой мере оно удовлетворяет двум требованиям, указанным в разделе 1.1.

Рассмотрим первое требование: на каждом из кластеров справедлив модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа со своими значениями параметров γ и c .

Пусть задан уровень качества промежутка $L = (\delta_0, \nu_0, \delta'_0)$. С помощью предиката Π_L можно определить, справедлив ли на кластере модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа на уровне L . Если нас интересуют значения параметра γ , которые годятся для кластера на уровне L , воспользуемся множеством Γ_L .

Если задано пороговое значение δ_0 или допустимое число аномальных точек ν_0 , а также задано дополнительное пороговое значение δ'_0 , то величины $\delta_{\min}(\nu_0, \delta'_0)$ и $\nu_{\min}(\delta_0, \delta'_0)$ позволяют оценить качество кластера.

Рассмотрим второе требование: значения параметров меняются при переходе от кластера к кластеру.

Рассмотрим два соседних кластера $[a \dots k]$ и $[k + 1 \dots b]$ и предположим, что на каждом из них справедлив модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа со своими значениями параметров.

Второе требование к разбиению можно трактовать так: если функциональная зависимость годится для некоторого кластера, то она не годится для соседнего кластера. Множество Φ_L задаёт множество функциональных зависимостей, которые годятся для кластера. Поэтому второе требование можно связать с предикатом

$$\Phi_L^{a,k} \cap \Phi_L^{k+1,b} = \emptyset.$$

Если данный предикат принимает значение 1, то не существует функциональной зависимости, которая годится для обоих кластеров $[a \dots k]$ и $[k + 1 \dots b]$ на уровне L . В противном случае такая функциональная зависимость существует.

Приведём общую схему (другую) трактовки второго требования к разбиению (см. рис. 8). На кластере справедлив модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа со своими значениями параметров (γ_0, c_0) , т.е. точки помещаются в полосу со «средней линией» (5) высоты $2\delta_0$, но возможны исключения из правила: допускаются ν_0 аномальных точек, при этом на аномальные точки накладывается ограничение: они должны содержаться в полосе со «средней линией» (5) высоты $2\delta'_0$. На другом кластере точки находятся вне полосы со «средней линией» (5) высоты $2\Delta_0$, но возможны исключения из правила: допускается, что не более U_0 точек могут содержаться в этой полосе.

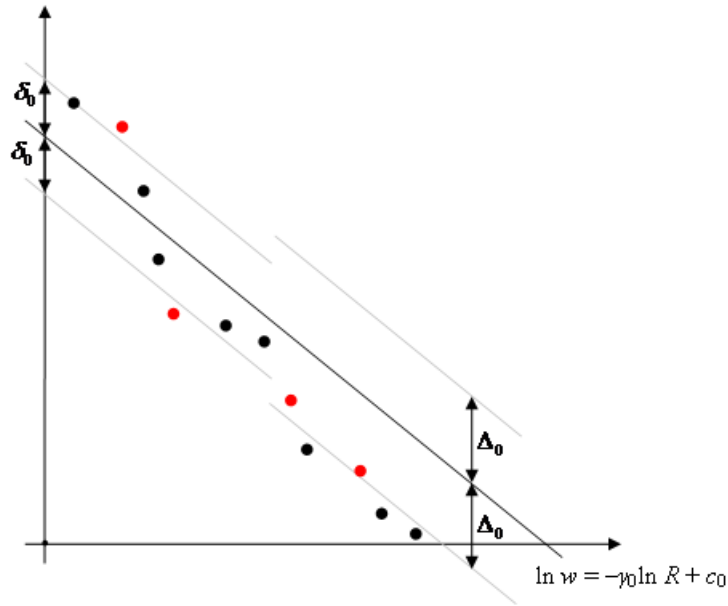


Рис. 8

Рассмотрим функциональные зависимости, которые годятся для кластера $[a...k]$. Будем рассматривать отдельные точки кластера $[k+1...b]$ относительно этих функциональных зависимостей.

Введём расстояние от точки $(\ln R_0, \ln w_0)$ до кластера $[a...k]$ на уровне L :

$$\rho_L^{a,k}(\ln R_0, \ln w_0) = \inf_{(\gamma, c) \in \Phi_L^{a,k}} \delta(\ln R_0, \ln w_0, \gamma, c).$$

Заметим, что если $\Phi_L^{a,k} = \emptyset$, то величина $\rho_L^{a,k}(\ln R_0, \ln w_0)$ не определена.

Будем рассматривать расстояния от точек кластера $[k+1...b]$ до кластера $[a...k]$:

$$\rho_L^{a,k}(\ln R_r, \ln w_r), r = k+1, \dots, b.$$

Введём величину

$$\mu_{\delta_0, \Delta_0}^{a,k}(\ln R_0, \ln w_0) = \min_{(\gamma, c): \delta(\ln R_0, \ln w_0, \gamma, c) \leq \Delta_0} V_{\delta_0}^{a,k}(\gamma, c) —$$

расстояние от точки $(\ln R_0, \ln w_0)$ до кластера $[a...k]$, измеренное в количестве точек кластера $[a...k]$.

Рассмотрим случай, когда разбиение не задаётся.

Процесс кластеризации эмпирических данных ранговым методом мы будем рассматривать как процесс расширения кластеров.

Пусть задан уровень качества промежутка $L = (\delta_0, \nu_0, \delta_0')$. Если кластер принадлежит множеству I_L , но не принадлежит множеству J_L , то его можно расширить. Если кластер принадлежит множеству J_L , то дальнейшее расширение кластера возможно при увеличении числа аномалий на этом кластере (точка, добавляемая в кластер при расширении, может стать аномальной), тогда требуется увеличить допустимое число аномалий ν_0 . Также дальнейшее расширение кластера возможно при увеличении порогового значения δ_0 и дополнительного порогового значения δ_0' .

Множество J_L представляет собой результат расширения кластеров на уровне L . Если кластер $[a...b]$ принадлежит множеству J_L , то как оценить возможность дальнейшего расширения этого кластера? Если задать только ν_0 и δ_0' (δ_0 и δ_0'), то для кластеров, которые получаются в результате расширения кластера $[a...b]$, можно вычислить значение величины

$\delta_{\min}(v_0, \delta_0')$ ($v_{\min}(\delta_0, \delta_0')$), характеризующей качество промежутка. Также можно вычислить расстояния от точек, не принадлежащих кластеру $[a...b]$, до кластера $[a...b]$.

Сформулируем задачи, которые требуется решить.

Пусть задано разбиение (8) при выполнении условий (9). Пусть также задан уровень качества промежутка $L = (\delta_0, v_0, \delta_0')$.

Задача 1. Найти $\Pi_L^{m_{i-1}+1, m_i}$, $\Gamma_L^{m_{i-1}+1, m_i}$, причём эти величины определены только для кластеров $[m_{i-1} + 1...m_i]$, для которых $v_0 \leq m_i - m_{i-1}$.

Задача 2. Найти $\delta_{\min}^{m_{i-1}+1, m_i}(v_0, \delta_0')$ для кластеров, для которых эта величина определена ($v_0 \leq m_i - m_{i-1}$, $\Pi_{\delta_0}^{m_{i-1}+1, m_i} = 1$).

Задача 3. Найти $v_{\min}^{m_{i-1}+1, m_i}(\delta_0, \delta_0')$ для кластеров, для которых эта величина определена ($\Pi_{\delta_0}^{m_{i-1}+1, m_i} = 1$).

Задача 4. Сопоставить множество J_L с разбиением S .

Задача 5. Найти матрицу $\left\{ \delta_{\min}^{a,b}(v_0, \delta_0') \right\}_{[a...b] \in T}$ ($v_0 \leq b - a + 1$).

Задача 6. Найти матрицу $\left\{ v_{\min}^{a,b}(\delta_0, \delta_0') \right\}_{[a...b] \in T}$.

Задача 7. Для каждого кластера $[m_{i-1} + 1...m_i]$, для которого $v_0 \leq m_i - m_{i-1}$, $\Pi_L^{m_{i-1}+1, m_i} = 1$, найти $\rho_L^{m_{i-1}+1, m_i}(\ln R_r, \ln w_r)$, $m_{i-1} + 1 - Q \leq r < m_{i-1} + 1$, $m_i < r \leq m_i + Q$ (величина $\rho_L^{m_{i-1}+1, m_i}$ определена, если $\Pi_L^{m_{i-1}+1, m_i} = 1$).

Пусть заданы δ_0 и Δ_0 .

Задача 8. Для каждого кластера $[m_{i-1} + 1...m_i]$ найти $\mu_{\delta_0, \Delta_0}^{m_{i-1}+1, m_i}(\ln R_r, \ln w_r)$, $m_{i-1} + 1 - Q \leq r < m_{i-1} + 1$, $m_i < r \leq m_i + Q$.

Задача 9. Найти множество J_L .

Пусть задан кластер $[a...b]$, $b - a + 1 \geq 3$.

Задача 10. Найти $\Pi_L^{a,b}$, $\Gamma_L^{a,b}$ ($v_0 \leq b - a + 1$).

Задача 11. Найти $\delta_{\min}^{a,b}(v_0, \delta_0')$ (если эта величина определена: $v_0 \leq b - a + 1$, $\Pi_{\delta_0}^{a,b} = 1$).

Задача 12. Найти $v_{\min}^{a,b}(\delta_0, \delta_0')$ (если эта величина определена: $\Pi_{\delta_0}^{a,b} = 1$).

Задача 13. Найти $\delta_{\min}^{a,b}(v, \delta_0')$, $v = 0, 1, 2, \dots, v_0$ ($v_0 \leq b - a + 1$).

Задача 14. Q — натуральное число, $v_0 \leq b - a + 1$, $\Pi_L^{a,b} = 1$. Найти $\rho_L^{a,b}(\ln R_r, \ln w_r)$, $a - Q \leq r < a$, $b < r \leq b + Q$.

Задача 15. Q — натуральное число. Найти $\mu_{\delta_0, \Delta_0}^{a,b}(\ln R_r, \ln w_r)$, $a - Q \leq r < a$, $b < r \leq b + Q$.

Пусть задана пара соседних кластеров: $[a...k]$, $[k + 1...b]$.

Задача 16. $v_0 \leq b - a + 1$, $\Pi_L^{a,k} = 1$, $\Pi_L^{k+1, b} = 1$. Найти $\rho_L^{a,k}(\ln R_r, \ln w_r)$, $r = k + 1, \dots, b$.
Найти $\rho_L^{k+1, b}(\ln R_r, \ln w_r)$, $r = a, \dots, k$.

Задача 17. Найти $\mu_{\delta_0, \Delta_0}^{a,k}(\ln R_r, \ln w_r)$, $r = k + 1, \dots, b$. Найти $\mu_{\delta_0, \Delta_0}^{k+1, b}(\ln R_r, \ln w_r)$, $r = a, \dots, k$.

2.2. Относительное количество аномальных точек

Наряду с уровнем качества промежутка $L = (\delta_0, \nu_0, \delta_0')$ рассмотрим уровень качества промежутка $\tilde{L} = (\delta_0, \theta_0\%, \delta_0')$, где $\theta_0\%$ — допустимое относительное количество аномальных точек.

Обозначим $\nu_{a,b}(\theta\%) = \left\lfloor \frac{(b-a+1)\theta\%}{100\%} \right\rfloor$, где $[x]$ — целая часть числа x .

Будем считать, что на промежутке $[a...b]$ справедлив модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа на уровне \tilde{L} , если на промежутке $[a...b]$ справедлив модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа на уровне $L = (\delta_0, \nu_{a,b}(\theta_0\%), \delta_0')$.

Введём величины:

$$\begin{aligned}\tilde{\delta}_{\min}^{a,b}(\theta_0\%, \delta_0') &= \delta_{\min}^{a,b}(\nu_{a,b}(\theta_0\%), \delta_0'), \\ \tilde{J}_{\tilde{L}} &= J_L, \\ \tilde{\Phi}_{\tilde{L}}^{a,b} &= \Phi_L^{a,b}, \\ \tilde{\Pi}_{\tilde{L}}^{a,b} &= \Pi_L^{a,b}, \\ \tilde{\Gamma}_{\tilde{L}}^{a,b} &= \Gamma_L^{a,b}, \\ \tilde{\rho}_{\tilde{L}}^{a,k}(\ln R_0, \ln w_0) &= \rho_L^{a,k}(\ln R_0, \ln w_0).\end{aligned}$$

2.3. Учёт погрешности исходных данных

Очень часто эмпирические данные имеют погрешность, обусловленную, например, наличием погрешности у измерительных приборов или ограниченностью разрядной сетки ЭВМ.

Предположим, что все значения w_i имеют абсолютную погрешность, равную Δw , т. е. модуль разности между w_i и точным значением w_i не превосходит Δw .

Придадим w_i приращение Δw_i , по модулю не превосходящее Δw . Найдём такие приращения Δw_i , что значение величины $\delta_{\min}^{a,b}(\nu_0, \delta_0')$ будет наибольшим. Введём величину

$$\bar{\delta}_{\min}^{a,b}(\nu_0, \delta_0') = \sup_{\substack{\Delta w_a, \dots, \Delta w_b \\ |\Delta w_i| \leq \Delta w}} \delta_{\min}^{a,b}(\nu_0, \delta_0' | w_a + \Delta w_a, \dots, w_b + \Delta w_b).$$

Аналогично введём величины:

$$\begin{aligned}\bar{\nu}_{\min}^{a,b}(\delta_0, \delta_0') &= \max_{\substack{\Delta w_a, \dots, \Delta w_b \\ |\Delta w_i| \leq \Delta w}} \nu_{\min}^{a,b}(\delta_0, \delta_0' | w_a + \Delta w_a, \dots, w_b + \Delta w_b), \\ \bar{\rho}_L^{a,k}(\ln R_0, \ln w_0) &= \inf_{\substack{\Delta w_0, \Delta w_a, \dots, \Delta w_k \\ |\Delta w_i| \leq \Delta w}} \rho_L^{a,k}(\ln R_0, \ln(w_0 + \Delta w_0) | w_a + \Delta w_a, \dots, w_k + \Delta w_k), \\ \bar{\mu}_{\delta_0, \Delta_0}^{a,k}(\ln R_0, \ln w_0) &= \min_{\substack{\Delta w_0, \Delta w_a, \dots, \Delta w_k \\ |\Delta w_i| \leq \Delta w}} \mu_{\delta_0, \Delta_0}^{a,k}(\ln R_0, \ln(w_0 + \Delta w_0) | w_a + \Delta w_a, \dots, w_k + \Delta w_k).\end{aligned}$$

2.4. План

Вначале рассматривается задача вычисления

$$\delta_{\min}(0, \infty) = \inf_{(\gamma, c) \in \mathbb{R}^2} \max_{a \leq r \leq b} |y_r - (-\gamma x_r + c)|$$

(половина наименьшей возможной высоты полосы, содержащей все точки промежутка $[a...b]$).

Эта задача является частным случаем задачи нахождения многочлена наилучшего равномерного приближения, т. е. многочлена $P_n(x)$ степени не выше n , на котором достигается минимум максимального отклонения:

$$\max_{0 \leq k \leq N} |y_k - P_n(x_k)| \rightarrow \min .$$

Для многочлена наилучшего равномерного приближения $P_n(x)$ справедливо следующее: найдутся $(n + 2)$ узла $x_{i_0} < x_{i_1} < \dots < x_{i_{n+1}}$, в которых разность $y_{i_k} - P_n(x_{i_k})$ достигает максимального по модулю значения с последовательной переменной знака. В случае $n = 1$ таких узлов три. Отсюда вытекает, что найдутся две точки $A(x_i, y_i)$, $B(x_j, y_j)$ такие, что все остальные точки лежат по одну сторону от прямой AB , а это означает, что отрезок AB является ребром выпуклой оболочки множества точек $\{(x_k, y_k)\}$.

Далее задача нахождения $\delta_{\min}(0, \infty)$ рассматривается с точки зрения проектирования точек на ось ординат: требуется найти направление проектирования, при котором разность между максимальной и минимальной координатами проекций принимает наименьшее значение.

Рассматриваются графики функций координат проекций в зависимости от параметра проектирования γ . Ставится задача нахождения максимума и минимума этих функций. Так как все эти функции линейные, то максимум и минимум — кусочно-линейные функции, графиком кусочно-линейной функции является ломаная. Требуется найти минимум разности максимума и минимума. Для нахождения минимума кусочно-линейной функции нужно найти значения этой функции, соответствующие вершинам ломаной — графика функции, — и среди всех этих значений выбрать наименьшее.

Рассмотрены алгоритмы построения ломаной — графика максимума — и ломаной — графика минимума. Показано, что эти алгоритмы представляют собой алгоритмы Джарвиса и Грэхема построения выпуклой оболочки.

Далее рассматривается задача вычисления $\delta_{\min}(v_0, \infty)$. Для решения этой задачи необходимо построить ломаные — графики функций $\max_1, \max_2, \dots, \max_{v_0+1}$ и $\min_1, \min_2, \dots, \min_{v_0+1}$. Здесь \max_j — j -я по максимальной координата проекции, \min_j — j -я по минимальности координата проекции. Для построения данных ломаных предлагается обобщение алгоритма Грэхема.

Рассматриваются альтернативные методы решения задачи кластеризации эмпирических данных ранговым методом: метод, использующий функционал качества разбиения, и метод, использующий сплайн-функции.

2.5. Выпуклая оболочка

Определение. Множество D точек плоскости называется *выпуклым*, если для любой пары точек p и q из D отрезок \overline{pq} целиком принадлежит D .

Определение. Пусть задано произвольное множество L точек плоскости. *Выпуклой оболочкой* множества L называется наименьшее выпуклое множество, содержащее L .

Выпуклая оболочка конечного множества точек плоскости является выпуклым многоугольником.

В дальнейшем нам понадобится следующая теорема.

Теорема 1. Отрезок l , определяемый двумя точками, является ребром выпуклой оболочки тогда и только тогда, когда все другие точки заданного множества лежат на l или с одной стороны от него [14].

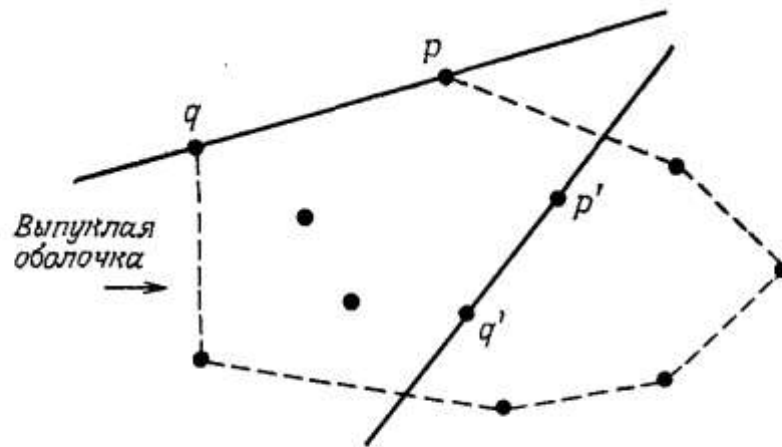


Рис. 3.8. Ребро выпуклой оболочки не может разделять множество точек на части. \overline{pq} является ребром выпуклой оболочки, так как все точки множества располагаются по одну сторону от него; $\overline{p'q'}$ не является ребром выпуклой оболочки, так как по обе стороны от него имеются точки.

Рис. 9. Рисунок 3.8 из книги [14]

Рассмотрим два алгоритма построения выпуклой оболочки конечного множества точек плоскости [14].

Алгоритм Грэхема

Найти точку, являющуюся внутренней точкой выпуклой оболочки.

Поместить начало координат в найденную точку. Упорядочить точки множества в соответствии со значениями полярного угла и расстояния от начала координат. Организовать точки в виде кольцевого дважды связанного списка.

Суть алгоритма Грэхема состоит в однократном просмотре упорядоченной последовательности точек, в процессе которого удаляются внутренние точки. Оставшиеся точки являются вершинами выпуклой оболочки.

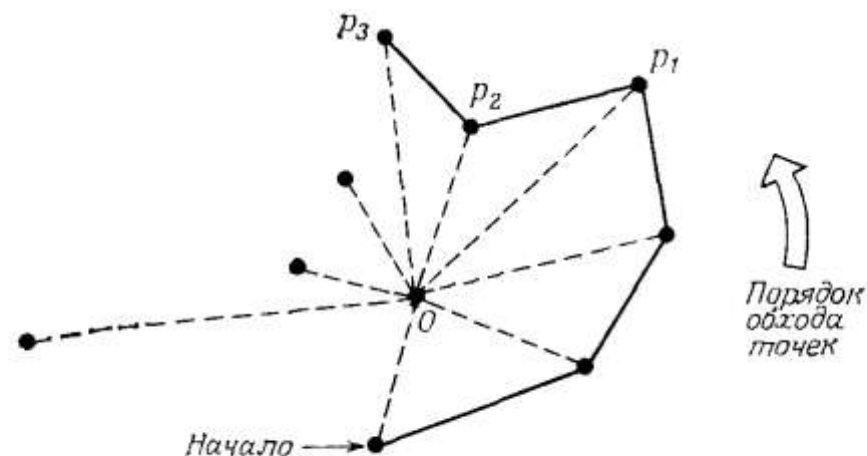


Рис. 3.6. Начало обхода точек в методе Грэхема. Вершина p_2 удаляется, если угол $p_1p_2p_3$ оказывается вогнутым.

Рис. 10. Рисунок 3.6 из книги [14]

Просмотр начинается с точки, помеченной как Начало, в качестве которой можно взять самую правую с наименьшей ординатой точку из данного множества. Тройки последовательных точек многократно проверяются в порядке обхода против часовой стрелки с целью определить, образуют или нет они угол, больший или равный 180° .

Если внутренний угол $p_1p_2p_3$ больше или равен 180° , то говорят, что $p_1p_2p_3$ образуют «правый поворот», иначе они образуют «левый поворот». Это можно определить, воспользовавшись формулой

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Точки $p_1p_2p_3$ образуют левый поворот тогда и только тогда, когда этот определитель положителен.

В зависимости от результата проверки угла, образуемого текущей тройкой точек, возможны два варианта продолжения просмотра.

1. $p_1p_2p_3$ образуют правый поворот. Удалить вершину p_2 и проверить тройку $p_0p_1p_3$.
2. $p_1p_2p_3$ образуют левый поворот. Продолжить просмотр, перейдя к проверке тройки $p_2p_3p_4$.

Просмотр завершается, когда, обойдя все вершины, вновь приходим в вершину Начало.

Время выполнения алгоритма — $O(N \log N)$, где N — число точек в множестве.

Опишем метод построения выпуклой оболочки, предложенный Эндрью.

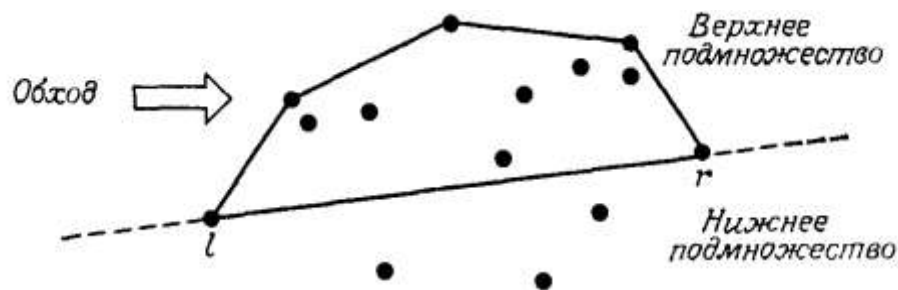


Рис. 3.7. Левая и правая крайние точки определяют разбиение множества на два подмножества.

Рис. 11. Рисунок 3.7 из книги [14]

Определим левую и правую крайние точки l и r и построим прямую, проходящую через эти точки. Оставшиеся точки разбиваются на два подмножества (нижнее и верхнее) в зависимости от того, по какую сторону от прямой они располагаются — ниже или выше прямой.

Метод заключается в построении двух ломаных — «нижней оболочки» и «верхней оболочки». Соединение этих двух ломаных даёт выпуклую оболочку исходного множества.

Рассмотрим построение верхней оболочки. Точки упорядочиваются в соответствии с возрастанием абсциссы, и к полученной последовательности применяется алгоритм Грэхема.

Заметим, что данный алгоритм есть не что иное, как частный случай применения исходного метода Грэхема, когда точка, совпадающая с началом координат, выбирается бесконечно удалённой в отрицательном направлении по оси ординат, так что в этом случае упорядоченность по абсциссе совпадает с упорядоченностью по полярному углу.

Алгоритм Джарвиса

Найдём в заданном множестве точек точку p_1 с наименьшей ординатой. Эта точка заведомо является вершиной выпуклой оболочки, и теперь хотелось бы найти следующую за ней вершину p_2 выпуклой оболочки. Точка p_2 — это точка, имеющая наименьший положительный полярный угол относительно точки p_1 как начала координат. Аналогично следующая точка p_3 имеет наименьший полярный угол относительно точки p_2 как начала координат и т. д.

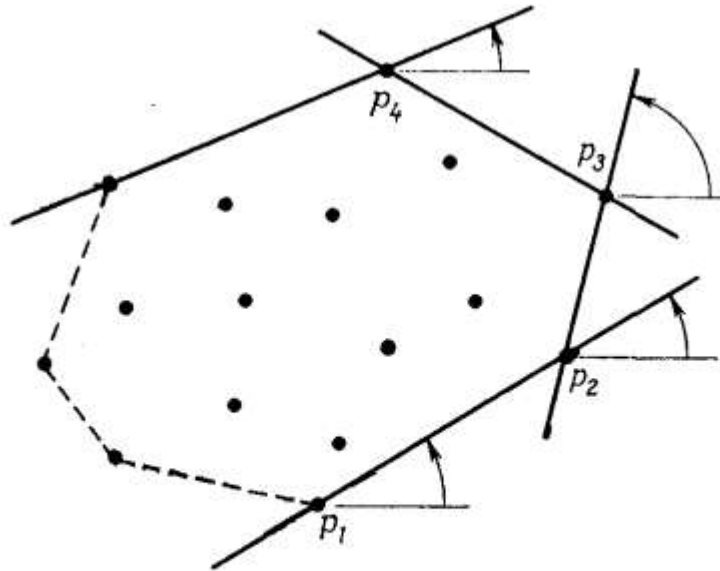


Рис. 3.9. Построение выпуклой оболочки методом Джарвиса. Алгоритм Джарвиса находит последовательные вершины оболочки путем многократного вычисления угла поворота. Каждая новая вершина определяется за время $O(N)$.

Рис. 12. Рисунок 3.9 из книги [14]

Алгоритм Джарвиса обходит кругом выпуклую оболочку, строя в нужном порядке последовательность её вершин, по одной вершине на каждом шаге.

Таким образом строится часть выпуклой оболочки (ломаная линия) от точки с наименьшей ординатой (точки p_1 на рис. 12) до точки с наибольшей ординатой (p_4 на том же рисунке). Построение выпуклой оболочки завершается нахождением другой ломаной, идущей из точки с наибольшей ординатой в точку с наименьшей ординатой.

Время выполнения алгоритма — $O(hN)$, где h — число вершин выпуклой оболочки.

2.6. Многочлен наилучшего равномерного приближения

Пусть задана таблица значений некоторой функции:

$$y_k = y(x_k), k = 0, \dots, N.$$

x	x_0	x_1	x_2	...	x_N
y	y_0	y_1	y_2	...	y_N

Пусть значения аргумента (узлы) упорядочены по возрастанию:

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N.$$

Каждый многочлен $P_n(A, x)$ степени не выше n

$$P_n(A, x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, A = (a_0, a_1, \dots, a_n)$$

имеет по отношению к исходной таблице естественную характеристику — максимальное уклонение:

$$\max_{0 \leq k \leq N} |y_k - P_n(A, x_k)|.$$

Положим при фиксированном n

$$\rho = \inf_{\{A\}} \max_{0 \leq k \leq N} |y_k - P_n(A, x_k)|.$$

Многочлен $P_n(A^*, x)$, для которого максимальное уклонение минимально

$$\max_{0 \leq k \leq N} |y_k - P_n(A^*, x_k)| = \rho,$$

называется многочленом наилучшего равномерного приближения исходной таблицы [4].

Рассмотрим случай $N = n + 1$.

Теорема 2. Пусть

$$\rho = \inf_{\{A\}} \max_{0 \leq k \leq n+1} |y_k - P_n(A, x_k)|.$$

В этом случае многочлен наилучшего равномерного приближения существует и единствен. Для того чтобы многочлен $P_n(A^*, x)$ был многочленом наилучшего равномерного приближения, необходимо и достаточно, чтобы при некотором h выполнялись соотношения

$$(-1)^k h + P_n(A^*, x_k) = y_k, k = 0, \dots, n + 1. \quad (10)$$

Наконец, имеет место равенство $\rho = |h|$ [4].

Определение. Построение многочлена, удовлетворяющего соотношениям (10), называется *чебышёвской интерполяцией*.

Рассмотрим случай $N > n + 1$.

Определение. *Базисом* σ называется любая $(n + 2)$ -точечная подсистема узлов

$$\sigma = \{x_{i_0} < x_{i_1} < \dots < x_{i_{n+1}}\}.$$

Множество базисов $\{\sigma\}$ будем обозначать через Ξ .

На каждом базисе σ можно осуществить чебышёвскую интерполяцию, т. е. построить многочлен $P_n(A(\sigma), x)$, удовлетворяющий соотношениям

$$(-1)^k h(\sigma) + P_n(A(\sigma), x_{i_k}) = y_{i_k}, k = 0, \dots, n + 1.$$

Пусть $\rho(\sigma)$ есть наилучшее равномерное приближение на базисе σ :

$$\rho(\sigma) = \inf_{\{A\}} \max_{0 \leq k \leq n+1} |y_{i_k} - P_n(A, x_{i_k})|.$$

Напомним, что тогда справедливы следующие равенства:

$$\rho(\sigma) = \max_{0 \leq k \leq n+1} |y_{i_k} - P_n(A(\sigma), x_{i_k})| = |h(\sigma)|.$$

Положим

$$\bar{\rho} = \max_{\sigma \in \Xi} \rho(\sigma).$$

Определение. Базис σ^* , для которого

$$\rho(\sigma^*) = \bar{\rho},$$

называется *экстремальным базисом*.

Поскольку множество базисов Ξ конечно, то экстремальный базис существует, хотя в общем случае он может быть не единственным [4].

Теорема 3. В случае $N > n + 1$ многочлен наилучшего равномерного приближения существует и единствен. Для того чтобы многочлен $P_n(A^*, x)$ был многочленом наилучшего равномерного приближения, необходимо и достаточно, чтобы он осуществлял чебышёвскую интерполяцию на некотором экстремальном базисе σ^* , т. е. чтобы

$$P_n(A^*, x) \equiv P_n(A(\sigma^*), x).$$

Наконец, $\rho = \bar{\rho}$, так что

$$\inf_{\{A\}} \max_{0 \leq k \leq N} |y_k - P_n(A, x_k)| = \max_{\sigma \in \Xi} \rho(\sigma) \quad [4].$$

Из теорем 2 и 3 можно получить следующую теорему.

Теорема 4. В случае $N \geq n + 1$ многочлен наилучшего равномерного приближения существует и единствен. Если $P_n(A^*, x)$ — многочлен наилучшего равномерного приближения, то существуют $(n + 2)$ узла $x_{i_0} < x_{i_1} < \dots < x_{i_{n+1}}$, в которых разность $y_{i_k} - P_n(A, x_{i_k})$ достигает максимального по модулю значения с последовательной переменной знака, т. е.

$$(-1)^k h + P_n(A^*, x_{i_k}) = y_{i_k}, k = 0, \dots, n + 1,$$

$$|h| = \rho = \max_{0 \leq k \leq N} |y_k - P_n(A^*, x_k)|.$$

2.7. Вычисление $\delta_{\min}(0, \infty)$

Обозначим $x = \ln R$, $y = \ln w$.

Рассмотрим точки промежутка $[a...b]$:

$$\begin{aligned} \{(x_r, y_r)\}_{r=a}^b, b-a+1 \geq 3, \\ x_a > x_{a+1} > \dots > x_b, \\ y_a \leq y_{a+1} \leq \dots \leq y_b. \end{aligned}$$

Требуется вычислить значение величины

$$\delta_{\min}(0, \infty) = \inf_{(\gamma, c) \in \mathbb{R}^2} \max_{a \leq r \leq b} \delta(x_r, y_r, \gamma, c).$$

Пусть

$$\delta(x_0, y_0, \gamma_0, c_0) = |y_0 - (-\gamma_0 x_0 + c_0)|.$$

Тогда

$$\delta_{\min}(0, \infty) = \inf_{(\gamma, c) \in \mathbb{R}^2} \max_{a \leq r \leq b} |y_r - (-\gamma x_r + c)|.$$

Данная задача сводится к задаче нахождения многочлена наилучшего равномерного приближения (см. раздел 2.6), если положить $n = 1$, $P_1(A, x) = -\gamma x + c$, $A = (c, \gamma)$. Действительно,

$$\rho = \inf_{\{A\}} \max_{0 \leq k \leq N} |y_k - P_n(A, x_k)| = \inf_{(\gamma, c) \in \mathbb{R}^2} \max_{a \leq r \leq b} |y_r - (-\gamma x_r + c)| = \delta_{\min}(0, \infty).$$

По теореме 4¹ многочлен наилучшего равномерного приближения существует и единствен; если $P_1(A^*, x)$ — многочлен наилучшего равномерного приближения, то существуют 3 абсциссы $x_{i_0} < x_{i_1} < x_{i_2}$, для которых

$$\begin{aligned} (-1)^k h + P_1(A^*, x_{i_k}) = y_{i_k}, k = 0, 1, 2, \\ |h| = \rho = \max_{a \leq r \leq b} |y_r - P_1(A^*, x_r)|. \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $h \geq 0$.

При $k = 0, 2$ имеем:

$$\begin{aligned} y_{i_k} - P_1(A^*, x_{i_k}) = h = \max_{a \leq r \leq b} |y_r - P_1(A^*, x_r)| \geq \max_{a \leq r \leq b} (y_r - P_1(A^*, x_r)) \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall r = a, \dots, b: h \geq y_r - P_1(A^*, x_r) \Rightarrow y_r \leq P_1(A^*, x_r) + h = -\gamma^* x_r + c^* + h, \end{aligned}$$

т. е. все точки $\{(x_r, y_r)\}_{r=a}^b$ лежат по одну сторону от прямой $y = -\gamma^* x + c^* + h$, проходящей через точки (x_{i_0}, y_{i_0}) и (x_{i_2}, y_{i_2}) . Значит, по теореме 1 отрезок, определяемый этими точками, является ребром выпуклой оболочки. Заметим, что прямая, проходящая через точки (x_{i_0}, y_{i_0}) и (x_{i_2}, y_{i_2}) , параллельна прямой $y = -\gamma^* x + c^*$.

Случай $h < 0$ рассматривается аналогично.

Сформулируем результат в виде следующей теоремы.

Теорема 5 (необходимое условие минимакса). Прямая $y = -\gamma^* x + c^*$, для которой

$$\max_{a \leq r \leq b} |y_r - (-\gamma^* x_r + c^*)| = \delta_{\min}(0, \infty),$$

существует и единственна, причём найдётся ребро выпуклой оболочки множества $\{(x_r, y_r) \mid r = a, \dots, b\}$, параллельное этой прямой.

То, что для решения рассматриваемой задачи следует построить выпуклую оболочку, упоминается в работах [17, 18, 21]. Идея доказательства данной теоремы приведена в [21].

2.8. Оператор проектирования

Введём семейство операторов проектирования с параметром γ :

$$p_\gamma(\ln R, \ln w) = \ln w + \gamma \ln R.$$

Геометрический смысл оператора проектирования: если через точку с координатами $(\ln R_0, \ln w_0)$ провести прямую с угловым коэффициентом $(-\gamma)$, то эта прямая пересечёт ось

¹ Условие $N \geq n + 1$ в теореме 4 сводится к условию $b - a + 1 \geq 3$.

ординат в точке с координатой $p_\gamma(\ln R_0, \ln w_0)$. Действительно, уравнение прямой с угловым коэффициентом $(-\gamma)$, проходящей через точку $(\ln R_0, \ln w_0)$:

$$\ln w = \ln w_0 - \gamma(\ln R - \ln R_0) = -\gamma \ln R + (\ln w_0 + \gamma \ln R_0).$$

При $\ln R = 0$

$$\ln w = \ln w_0 + \gamma \ln R_0 = p_\gamma(\ln R_0, \ln w_0),$$

что и требовалось доказать.

2.9. Вычисление $\delta_{\min}(0, \infty)$ (продолжение)

В этом разделе рассматриваются алгоритмы вычисления $\delta_{\min}(0, \infty)$. Здесь изложен подход, основанный на проектировании точек во всех возможных направлениях. Этот подход позволяет затем перейти к задаче вычисления $\delta_{\min}(v_0, \delta'_0)$ ($v_0 \neq 0$), которая не сводится к задаче построения выпуклой оболочки.

Как и в разделе 2.7, рассмотрим точки промежутка $[a...b]$:

$$\{(x_r, y_r)\}_{r=a}^b, b - a + 1 \geq 3,$$

$$x_a > x_{a+1} > \dots > x_b,$$

$$y_a \leq y_{a+1} \leq \dots \leq y_b.$$

Требуется вычислить значение величины

$$\delta_{\min}(0, \infty) = \inf_{(\gamma, c) \in \mathbb{R}^2} \max_{a \leq r \leq b} |y_r - (-\gamma x_r + c)|.$$

Заметим, что

$$|y_r - (-\gamma x_r + c)| = |(y_r + \gamma x_r) - c| = |p_\gamma(x_r, y_r) - c|.$$

Таким образом,

$$\delta_{\min}(0, \infty) = \inf_{(\gamma, c) \in \mathbb{R}^2} \max_{a \leq r \leq b} |p_\gamma(x_r, y_r) - c|.$$

Предложение 3. Пусть функция $f(x, y)$ задана на множестве \mathbb{R}^2 , $\forall x' \in \mathbb{R} \exists \min_{y \in \mathbb{R}} f(x', y)$ и

$$\exists \min_{x \in \mathbb{R}} \min_{y \in \mathbb{R}} f(x, y). \text{ Тогда } \exists \inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = \min_{x \in \mathbb{R}} \min_{y \in \mathbb{R}} f(x, y).$$

Доказательство.

$$\exists \min_{x \in \mathbb{R}} \min_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \Rightarrow \exists x_0 \in \mathbb{R} : \min_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \geq \min_{y \in \mathbb{R}} f(x_0, y) \forall x \in \mathbb{R};$$

$$\exists \min_{y \in \mathbb{R}} f(x_0, y) \Rightarrow \exists y_0 \in \mathbb{R} : f(x_0, y) \geq f(x_0, y_0) \forall y \in \mathbb{R};$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \geq \min_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \geq \min_{y \in \mathbb{R}} f(x_0, y) \geq f(x_0, y_0).$$

$$\text{Итак, } \exists (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\text{Следовательно, } \exists \inf_{(x, y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = f(x_0, y_0) = \min_{y \in \mathbb{R}} f(x_0, y) = \min_{x \in \mathbb{R}} \min_{y \in \mathbb{R}} f(x, y).$$

$$\text{Предложение 4. } \exists \min_{c \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq i \leq n} |q_i - c| = \frac{1}{2} (\max_{1 \leq i \leq n} q_i - \min_{1 \leq i \leq n} q_i).$$

Доказательство.

Докажем, что

$$\forall c \in \mathbb{R} : \max_{1 \leq i \leq n} |q_i - c| = \max \left\{ c - \min_{1 \leq i \leq n} q_i, \max_{1 \leq i \leq n} q_i - c \right\}.$$

Рассмотрим три случая.

$$1) c \leq \min_{1 \leq i \leq n} q_i.$$

$$\forall i, 1 \leq i \leq n : c \leq q_i \Rightarrow |q_i - c| = q_i - c;$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} |q_i - c| = \max_{1 \leq i \leq n} (q_i - c) = \max_{1 \leq i \leq n} q_i - c;$$

$$c - \min_{1 \leq i \leq n} q_i \leq 0;$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} q_i - c \geq \min_{1 \leq i \leq n} q_i - c \geq 0;$$

$$\max \left\{ c - \min_{1 \leq i \leq n} q_i, \max_{1 \leq i \leq n} q_i - c \right\} = \max_{1 \leq i \leq n} q_i - c = \max_{1 \leq i \leq n} |q_i - c|.$$

$$2) c \geq \max_{1 \leq i \leq n} q_i.$$

$$\forall i, 1 \leq i \leq n : c \geq q_i \Rightarrow |q_i - c| = c - q_i;$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} |q_i - c| = \max_{1 \leq i \leq n} (c - q_i) = c + \max_{1 \leq i \leq n} (-q_i) = c - \min_{1 \leq i \leq n} q_i;$$

$$c - \min_{1 \leq i \leq n} q_i \geq c - \max_{1 \leq i \leq n} q_i \geq 0;$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} q_i - c \leq 0;$$

$$\max \left\{ c - \min_{1 \leq i \leq n} q_i, \max_{1 \leq i \leq n} q_i - c \right\} = c - \min_{1 \leq i \leq n} q_i = \max_{1 \leq i \leq n} |q_i - c|.$$

$$3) \min_{1 \leq i \leq n} q_i < c < \max_{1 \leq i \leq n} q_i.$$

Разобьём числа $\{q_i\}_{i=1}^n$ на две группы:

- числа, для которых $q_i \leq c$;
- числа, для которых $q_i > c$.

В силу неравенства $\min_{1 \leq i \leq n} q_i < c < \max_{1 \leq i \leq n} q_i$ обе группы непусты.

$$\max_{1 \leq i \leq n} |q_i - c| = \max \left\{ \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ q_i \leq c}} |q_i - c|, \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ q_i > c}} |q_i - c| \right\};$$

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ q_i \leq c}} |q_i - c| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ q_i \leq c}} (c - q_i) = c - \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ q_i \leq c}} q_i = c - \min_{1 \leq i \leq n} q_i;$$

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ q_i > c}} |q_i - c| = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ q_i > c}} (q_i - c) = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ q_i > c}} q_i - c = \max_{1 \leq i \leq n} q_i - c;$$

$$\max_{1 \leq i \leq n} |q_i - c| = \max \left\{ c - \min_{1 \leq i \leq n} q_i, \max_{1 \leq i \leq n} q_i - c \right\}.$$

Требуется доказать, что

$$\min_{c \in \mathbb{R}} \max \left\{ c - \min_{1 \leq i \leq n} q_i, \max_{1 \leq i \leq n} q_i - c \right\} = \frac{1}{2} \left(\max_{1 \leq i \leq n} q_i - \min_{1 \leq i \leq n} q_i \right).$$

Обозначим $\min_{1 \leq i \leq n} q_i = A$, $\max_{1 \leq i \leq n} q_i = B$.

Рассмотрим три случая.

$$1) c < \frac{A+B}{2}.$$

$$(B-c) - (c-A) = A+B-2c > 0;$$

$$B-c > c-A;$$

$$\max \{c-A, B-c\} = B-c > B - \frac{A+B}{2} = \frac{B-A}{2}.$$

$$2) c > \frac{A+B}{2}.$$

$$(B-c) - (c-A) = A+B-2c < 0;$$

$$B-c < c-A;$$

$$\max \{c-A, B-c\} = c-A > \frac{A+B}{2} - A = \frac{B-A}{2}.$$

$$3) c = \frac{A+B}{2}.$$

$$c-A = \frac{A+B}{2} - A = \frac{B-A}{2};$$

$$B - c = B - \frac{A + B}{2} = \frac{B - A}{2};$$

$$\max\{c - A, B - c\} = \frac{B - A}{2}.$$

Итак, $\forall c \in \mathbb{R} : \max\{c - A, B - c\} \geq \frac{B - A}{2}$, равенство достигается при $c = \frac{A + B}{2}$.

Следовательно, $\min_{c \in \mathbb{R}} \max\{c - A, B - c\} = \frac{B - A}{2}$.

Предложение доказано.

Из предложения 4 следует, что

$$\forall \gamma \in \mathbb{R} \exists \min_{c \in \mathbb{R}} \max_{a \leq r \leq b} |p_\gamma(x_r, y_r) - c| = \frac{1}{2} \left(\max_{a \leq r \leq b} p_\gamma(x_r, y_r) - \min_{a \leq r \leq b} p_\gamma(x_r, y_r) \right).$$

По предложению 3, если

$$\exists \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \min_{c \in \mathbb{R}} \max_{a \leq r \leq b} |p_\gamma(x_r, y_r) - c| = \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} \left(\max_{a \leq r \leq b} p_\gamma(x_r, y_r) - \min_{a \leq r \leq b} p_\gamma(x_r, y_r) \right) \right),$$

то

$$\exists \inf_{(\gamma, c) \in \mathbb{R}^2} \max_{a \leq r \leq b} |p_\gamma(x_r, y_r) - c| = \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \min_{c \in \mathbb{R}} \max_{a \leq r \leq b} |p_\gamma(x_r, y_r) - c|.$$

Определение. Будем называть функцию $f(x)$ *кусочно-линейной*, если она определена на всей действительной оси и

$$\exists a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}, k_0, k_1, \dots, k_m, b_0, b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R},$$

$$m \geq 1, a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_m:$$

$$f(x) = k_0 x + b_0 \quad \forall x \in (-\infty, a_1],$$

$$f(x) = k_1 x + b_1 \quad \forall x \in [a_1, a_2],$$

...

$$f(x) = k_{m-1} x + b_{m-1} \quad \forall x \in [a_{m-1}, a_m],$$

$$f(x) = k_m x + b_m \quad \forall x \in [a_m, +\infty).$$

Предложение 5. Если $f(x)$ и $g(x)$ — кусочно-линейные функции, то $h(x) = f(x) - g(x)$ — кусочно-линейная функция.

Предложение 6. Пусть $f(x)$ — кусочно-линейная функция, $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$. Тогда $k_0 \leq 0, k_m \geq 0$.

Доказательство.

Докажем, что $k_0 \leq 0$.

Предположим противное: $k_0 > 0$.

$$\forall x \in (-\infty, a_1]: f(x) = k_0 x + b_0 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b_0}{k_0}. \text{ Противоречие.}$$

Докажем, что $k_m \geq 0$.

Предположим противное: $k_m < 0$.

$$\forall x \in [a_m, +\infty): f(x) = k_m x + b_m < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b_m}{k_m}. \text{ Противоречие.}$$

Предложение 7. Пусть $f(x)$ — кусочно-линейная функция, $\forall x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0$. Тогда

$$\exists \min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min\{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m)\}.$$

Доказательство.

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min\left\{ \min_{x \in (-\infty, a_1]} f(x), \min_{x \in [a_1, a_2]} f(x), \dots, \min_{x \in [a_{m-1}, a_m]} f(x), \min_{x \in [a_m, +\infty)} f(x) \right\}.$$

По предложению 6 $k_0 \leq 0 \Rightarrow \min_{x \in (-\infty, a_1]} f(x) = f(a_0)$.

По предложению 6 $k_m \geq 0 \Rightarrow \min_{x \in [a_m, +\infty)} f(x) = f(a_m)$.

$$\forall i = 2, \dots, m: \min_{x \in [a_{i-1}, a_i]} f(x) = \min \{f(a_{i-1}), f(a_i)\}.$$

Следовательно, $\min_{x \in \mathbb{R}} f(x) = \min \{f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_m)\}.$

Рассмотрим следующие функции:

$$\begin{aligned}\varphi_r(\gamma) &= p_\gamma(x_r, y_r), \\ \varphi_{\max}(\gamma) &= \max_{a \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma), \\ \varphi_{\min}(\gamma) &= \min_{a \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma), \\ \varphi(\gamma) &= \varphi_{\max}(\gamma) - \varphi_{\min}(\gamma).\end{aligned}$$

По следствиям из теорем 6 и 6' $\varphi_{\max}(\gamma)$ и $\varphi_{\min}(\gamma)$ — кусочно-линейные функции \Rightarrow по предложению 5 $\varphi(\gamma)$ — кусочно-линейная функция; кроме того, $\forall \gamma \in \mathbb{R} : \varphi(\gamma) \geq 0 \Rightarrow$ по предложению 7

$$\exists \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \varphi(\gamma) = \min \{\varphi(a_1), \varphi(a_2), \dots, \varphi(a_m)\}. \quad (11)$$

Итак,

$$\begin{aligned}\exists \min_{\gamma \in \mathbb{R}} (\max_{a \leq r \leq b} p_\gamma(x_r, y_r) - \min_{a \leq r \leq b} p_\gamma(x_r, y_r)) &= \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \varphi(\gamma) \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \min_{c \in \mathbb{R}} \max_{a \leq r \leq b} |p_\gamma(x_r, y_r) - c| &= \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} (\max_{a \leq r \leq b} p_\gamma(x_r, y_r) - \min_{a \leq r \leq b} p_\gamma(x_r, y_r)) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \min_{\gamma \in \mathbb{R}} (\max_{a \leq r \leq b} p_\gamma(x_r, y_r) - \min_{a \leq r \leq b} p_\gamma(x_r, y_r)) = \frac{1}{2} \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \varphi(\gamma).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\exists \inf_{(\gamma, c) \in \mathbb{R}^2} \max_{a \leq r \leq b} |p_\gamma(x_r, y_r) - c| = \frac{1}{2} \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \varphi(\gamma),$$

а это и есть $\delta_{\min}(0, \infty)$.

Рассмотрим задачу вычисления $\min_{\gamma \in \mathbb{R}} \varphi(\gamma)$. Графиком функции $\varphi(\gamma)$ является ломаная. Исходя из формулы (11), нужно найти вершины ломаной — графика функции $\varphi(\gamma)$, — $\min_{\gamma \in \mathbb{R}} \varphi(\gamma)$ равняется наименьшей из ординат вершин этой ломаной.

Чтобы найти абсциссы вершин ломаной — графика функции $\varphi(\gamma)$, — нужно найти абсциссы вершин ломаной — графика функции $\varphi_{\max}(\gamma)$ — и абсциссы вершин ломаной — графика функции $\varphi_{\min}(\gamma)$, — после чего объединить абсциссы вершин этих двух ломаных и упорядочить их по возрастанию. Тогда мы получим абсциссы вершин ломаной — графика функции $\varphi(\gamma)$.

Рассмотрим задачу построения ломаной — графика функции $\varphi_{\max}(\gamma)$.

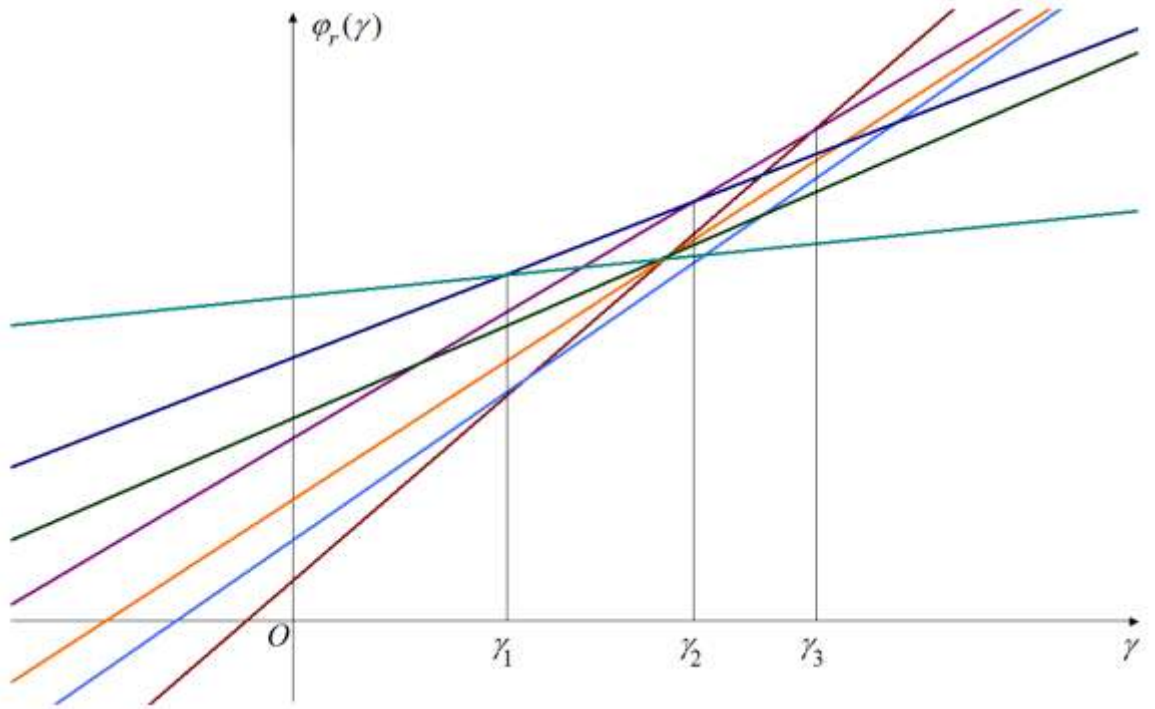


Рис. 13

Опишем алгоритм построения ломаной.

Начинаем строить ломаную с прямой — графика функции $\varphi_b(\gamma)$ (эта прямая — текущий максимум). Находим точки пересечения этой прямой с прямыми — графиками функций $\varphi_{b-1}(\gamma), \dots, \varphi_a(\gamma)$. Выбираем точку пересечения с наименьшей абсциссой γ_1 . Пусть это точка пересечения с графиком функции $\varphi_{k_1}(\gamma)$. Прямая — график функции $\varphi_{k_1}(\gamma)$ — становится текущим максимумом. Далее находим точки пересечения этой прямой с прямыми — графиками функций $\varphi_{k_1-1}(\gamma), \dots, \varphi_a(\gamma)$. Выбираем точку пересечения с наименьшей абсциссой γ_2 . Пусть это точка пересечения с графиком функции $\varphi_{k_2}(\gamma)$. Прямая — график функции $\varphi_{k_2}(\gamma)$ — становится текущим максимумом. Этот процесс продолжается, пока текущим максимумом не станет прямая — график функции $\varphi_a(\gamma)$.

Найдём абсциссу точки пересечения прямых — графиков функций $\varphi_i(\gamma)$ и $\varphi_j(\gamma)$ ($i \neq j$).

$$\varphi_i(\gamma) = \varphi_j(\gamma) \Leftrightarrow x_i \gamma + y_i = x_j \gamma + y_j \Leftrightarrow (x_i - x_j) \gamma = -(y_i - y_j).$$

Если $i \neq j$, то $x_i \neq x_j \Rightarrow x_i - x_j \neq 0$.

Следовательно,

$$\varphi_i(\gamma) = \varphi_j(\gamma) \Leftrightarrow \gamma = \gamma_{i,j} = -\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}.$$

Замечание. $\gamma_{i,j} = \gamma_{j,i}$.

Замечание. Угловым коэффициентом прямой, проходящей через точки (x_i, y_i) и (x_j, y_j) , равен $(-\gamma_{i,j})$ [13].

Предложение 8.

$$i < j, \gamma < \gamma_{i,j} \Rightarrow \varphi_i(\gamma) < \varphi_j(\gamma);$$

$$i < j, \gamma > \gamma_{i,j} \Rightarrow \varphi_i(\gamma) > \varphi_j(\gamma);$$

$$i < j, \gamma = \gamma_{i,j} \Rightarrow \varphi_i(\gamma) = \varphi_j(\gamma).$$

Доказательство.

$$\varphi_i(\gamma) = x_i\gamma + y_i, \quad \varphi_j(\gamma) = x_j\gamma + y_j;$$

$$\begin{aligned} \varphi_i(\gamma) - \varphi_j(\gamma) &= (x_i\gamma + y_i) - (x_j\gamma + y_j) = (x_i - x_j)\gamma + (y_i - y_j) = (x_i - x_j) \left(\gamma + \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} \right) = \\ &= (x_i - x_j)(\gamma - \gamma_{i,j}); \end{aligned}$$

$$i < j \Rightarrow x_i - x_j > 0;$$

$$\gamma < \gamma_{i,j} \Rightarrow \varphi_i(\gamma) - \varphi_j(\gamma) < 0 \Rightarrow \varphi_i(\gamma) < \varphi_j(\gamma);$$

$$\gamma > \gamma_{i,j} \Rightarrow \varphi_i(\gamma) - \varphi_j(\gamma) > 0 \Rightarrow \varphi_i(\gamma) > \varphi_j(\gamma);$$

$$\gamma = \gamma_{i,j} \Rightarrow \varphi_i(\gamma) - \varphi_j(\gamma) = 0 \Rightarrow \varphi_i(\gamma) = \varphi_j(\gamma).$$

Проиллюстрируем предложение 8 геометрически.

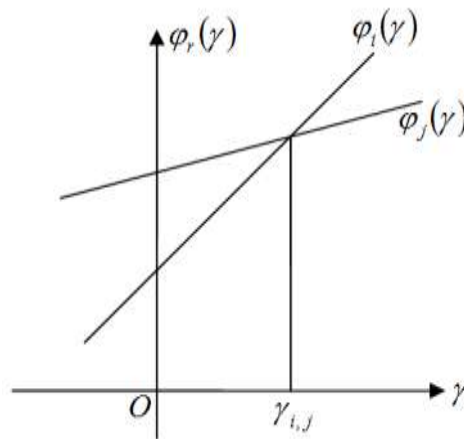


Рис. 14

Когда γ находится левее точки пересечения прямых — графиков функций $\varphi_i(\gamma)$ и $\varphi_j(\gamma)$, — точка прямой с меньшим номером находится ниже. Когда γ находится правее точки пересечения прямых, точка прямой с меньшим номером находится выше.

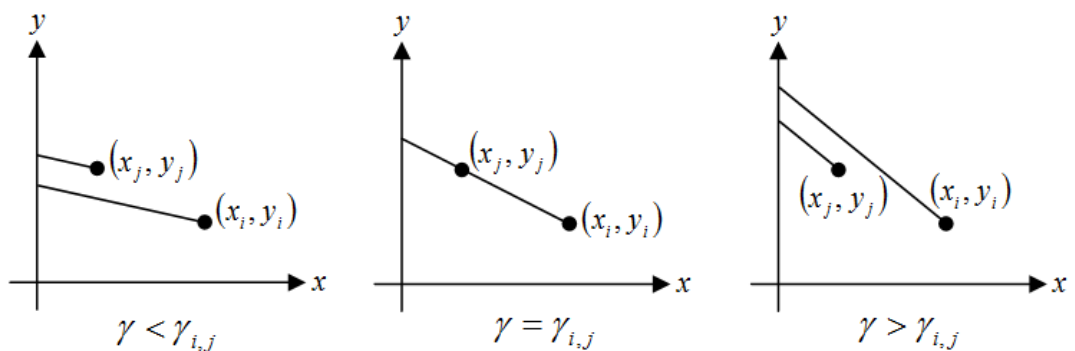


Рис. 15

При проектировании с параметром $\gamma < \gamma_{i,j}$ проекция точки с меньшим номером находится ниже. При проектировании с параметром $\gamma = \gamma_{i,j}$ проекции точек совпадают. При проектировании с параметром $\gamma > \gamma_{i,j}$ проекция точки с меньшим номером находится выше.

Введём последовательности $\{k_l\}_{l=0}^s$ и $\{\gamma_l\}_{l=1}^s$.

$$\begin{cases} k_0 = b, \\ k_l : \min_{a \leq j < k_{l-1}} \gamma_{k_{l-1}, j} = \gamma_{k_{l-1}, k_l}, l = 1, \dots, s, \\ k_s = a, \end{cases}$$

$$b = k_0 > k_1 > \dots > k_{s-1} > k_s = a,$$

$$s \geq 1,$$

$$\gamma_l = \gamma_{k_{l-1}, k_l}, l = 1, \dots, s.$$

Теорема 6.

а) $\forall \gamma \in (-\infty, \gamma_1]: \varphi_b(\gamma) \equiv \varphi_{k_0}(\gamma) = \varphi_{\max}(\gamma);$

б) $\forall l = 2, \dots, s: \forall \gamma \in [\gamma_{l-1}, \gamma_l]: \varphi_{k_{l-1}}(\gamma) = \varphi_{\max}(\gamma);$

в) $\forall \gamma \in [\gamma_s, +\infty): \varphi_a(\gamma) \equiv \varphi_{k_s}(\gamma) = \varphi_{\max}(\gamma).$

Доказательство.

а) Пусть $\gamma \leq \gamma_1$.

$$\gamma_1 = \gamma_{k_0, k_1} = \min_{a \leq j < k_0} \gamma_{k_0, j} \Rightarrow \forall j, a \leq j < k_0: \gamma_1 \leq \gamma_{k_0, j} \Rightarrow \gamma \leq \gamma_{k_0, j} = \gamma_{j, k_0} \Rightarrow$$

\Rightarrow по предложению 8 $\varphi_j(\gamma) \leq \varphi_{k_0}(\gamma) \equiv \varphi_b(\gamma)$.

$$\text{Итак, } \forall j, a \leq j \leq b: \varphi_j(\gamma) \leq \varphi_b(\gamma) \Rightarrow \varphi_{\max}(\gamma) = \max_{a \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma) = \varphi_b(\gamma).$$

Таким образом, $\forall \gamma \in (-\infty, \gamma_1]: \varphi_b(\gamma) = \varphi_{\max}(\gamma)$.

б) База индукции. $\varphi_{k_1}(\gamma_1) = \varphi_{\max}(\gamma_1)$.

$$\gamma_1 = \gamma_{k_0, k_1} \Rightarrow \varphi_{k_0}(\gamma_1) = \varphi_{k_1}(\gamma_1); \text{ по доказанному в пункте а) } \varphi_{k_0}(\gamma_1) = \varphi_{\max}(\gamma_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_{k_1}(\gamma_1) = \varphi_{\max}(\gamma_1).$$

Гипотеза индукции. $\varphi_{k_{l-1}}(\gamma_{l-1}) = \varphi_{\max}(\gamma_{l-1}), 2 \leq l \leq s$.

Право перехода. Докажем, что $\varphi_{k_l}(\gamma_l) = \varphi_{\max}(\gamma_l)$ и, кроме того, $\gamma_{l-1} \leq \gamma_l$ и $\forall \gamma \in [\gamma_{l-1}, \gamma_l]: \varphi_{k_{l-1}}(\gamma) = \varphi_{\max}(\gamma)$.

$$\varphi_{k_{l-1}}(\gamma_{l-1}) = \varphi_{\max}(\gamma_{l-1}) \Rightarrow \varphi_{k_l}(\gamma_{l-1}) \leq \varphi_{k_{l-1}}(\gamma_{l-1}); k_l < k_{l-1} \Rightarrow$$

\Rightarrow по предложению 8 $\gamma_{l-1} \leq \gamma_{k_l, k_{l-1}} = \gamma_l$.

Пусть $\gamma_{l-1} \leq \gamma \leq \gamma_l$.

1) $k_{l-1} < j \leq b$.

$$\varphi_{k_{l-1}}(\gamma_{l-1}) = \varphi_{\max}(\gamma_{l-1}) \Rightarrow \forall j, k_{l-1} < j \leq b: \varphi_{k_{l-1}}(\gamma_{l-1}) \geq \varphi_j(\gamma_{l-1}) \Rightarrow$$

\Rightarrow по предложению 8 $\gamma_{l-1} \geq \gamma_{k_{l-1}, j} \Rightarrow \gamma \geq \gamma_{k_{l-1}, j} \Rightarrow$ по предложению 8 $\varphi_{k_{l-1}}(\gamma) \geq \varphi_j(\gamma)$.

2) $a \leq j < k_{l-1}$.

$$\gamma_l = \gamma_{k_{l-1}, k_l} = \min_{a \leq j < k_{l-1}} \gamma_{k_{l-1}, j} \Rightarrow \forall j, a \leq j < k_{l-1}: \gamma_l \leq \gamma_{k_{l-1}, j} \Rightarrow \gamma \leq \gamma_{k_{l-1}, j} = \gamma_{j, k_{l-1}} \Rightarrow$$

\Rightarrow по предложению 8 $\varphi_j(\gamma) \leq \varphi_{k_{l-1}}(\gamma)$.

$$\text{Итак, } \forall \gamma \in [\gamma_{l-1}, \gamma_l]: \forall j, a \leq j \leq b: \varphi_j(\gamma) \leq \varphi_{k_{l-1}}(\gamma) \Rightarrow \varphi_{k_{l-1}}(\gamma) = \varphi_{\max}(\gamma).$$

в) Пусть $\gamma \geq \gamma_s$.

$$\text{По доказанному в пункте б) } \varphi_a(\gamma_s) \equiv \varphi_{k_s}(\gamma_s) = \varphi_{\max}(\gamma_s) \Rightarrow \forall j, a < j \leq b: \varphi_a(\gamma_s) \geq \varphi_j(\gamma_s) \Rightarrow$$

\Rightarrow по предложению 8 $\gamma_s \geq \gamma_{a, j} \Rightarrow \gamma \geq \gamma_{a, j} \Rightarrow$

\Rightarrow по предложению 8 $\varphi_a(\gamma) \geq \varphi_j(\gamma) \Rightarrow \varphi_{\max}(\gamma) = \varphi_a(\gamma)$.

$$\text{Итак, } \forall \gamma \in [\gamma_s, +\infty): \varphi_a(\gamma) = \varphi_{\max}(\gamma).$$

Теорема доказана.

Замечание. В процессе доказательства теоремы 6 было доказано, что $\forall l = 2, \dots, s: \gamma_{l-1} \leq \gamma_l$.

Следствие. $\varphi_{\max}(\gamma)$ — кусочно-линейная функция.

Приведём алгоритм вычисления последовательностей $\{k_l\}_{l=0}^s$ и $\{\gamma_l\}_{l=1}^s$.

Алгоритм 1.

$l \leftarrow 0$;

$k_0 \leftarrow b$;

do

$l \leftarrow l + 1$;

$i \leftarrow a$;

$m \leftarrow \gamma_{k_{l-1}, a}$;

for $j \leftarrow a + 1$ **to** $k_{l-1} - 1$ **do**

$q \leftarrow \gamma_{k_{l-1}, j}$;

if $(q < m)$ **then**

$i \leftarrow j$;

$m \leftarrow q$;

end

end

$k_l \leftarrow i$;

$\gamma_l \leftarrow m$;

while $(k_l > a)$;

$s \leftarrow l$;

Время выполнения алгоритма — $O(sM)$, где $M = b - a + 1$.

Описанный алгоритм представляет собой алгоритм Джарвиса построения выпуклой оболочки.

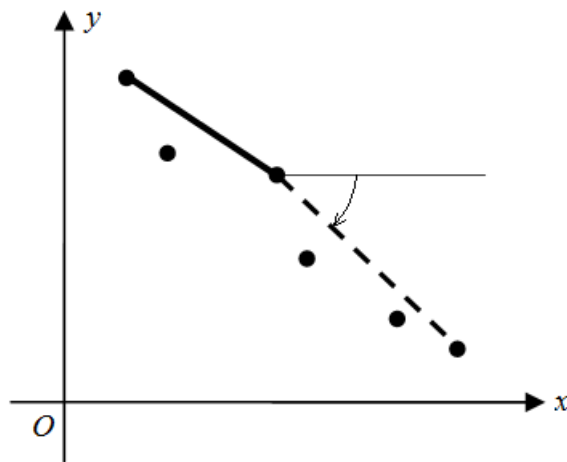


Рис. 16

Выбор точки пересечения прямых с наименьшей абсциссой эквивалентен выбору точки, имеющей наименьший полярный угол, в алгоритме Джарвиса.

Таким образом, звенья ломаной соответствуют вершинам выпуклой оболочки, а вершины ломаной соответствуют наклонам рёбер выпуклой оболочки.

Опишем другой алгоритм построения ломаной — графика функции $\varphi_{\max}(\gamma)$.

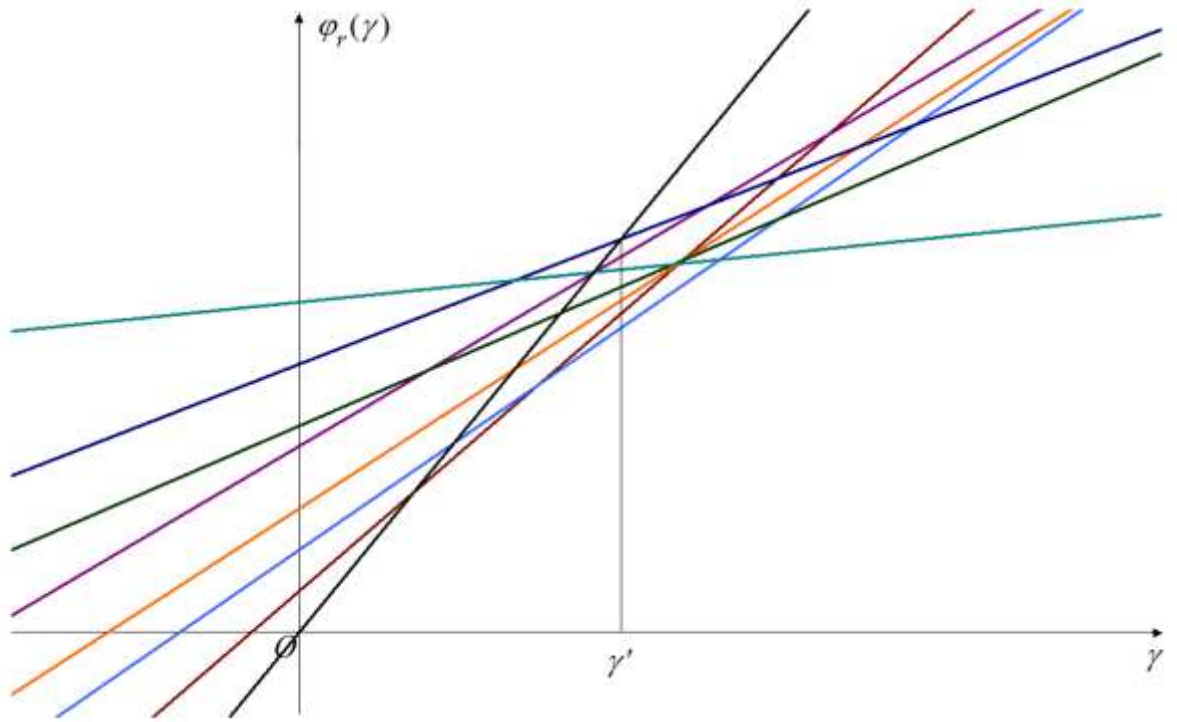


Рис. 17

Будем добавлять прямые по одной: сначала $\varphi_b(\gamma)$, затем $\varphi_{b-1}(\gamma)$, ..., $\varphi_a(\gamma)$. Будем последовательно находить $\max_{b-1 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$, $\max_{b-2 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$, ..., $\max_{a \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$.

Предположим, что ломаная — график функции $\max_{q+1 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$ — уже построена. Укажем, как построить ломаную — график функции $\max_{q \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$.

Можно показать, что прямая — график функции $\varphi_q(\gamma)$ — пересекает ломаную — график функции $\max_{q+1 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$ — ровно в одной точке с абсциссой γ' .

Ломаную — график функции $\max_{q \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$ — можно получить так: на промежутке $(-\infty, \gamma']$ эта ломаная совпадает с ломаной — графиком функции $\max_{q+1 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$, — а на промежутке $[\gamma', +\infty)$ — с прямой — графиком функции $\varphi_q(\gamma)$.

Предложение 9. Пусть $i < j < k$.

$$\gamma_{i,j} < \gamma_{i,k} \Leftrightarrow \gamma_{i,j} < \gamma_{j,k} \Leftrightarrow \gamma_{i,k} < \gamma_{j,k};$$

$$\gamma_{i,j} > \gamma_{i,k} \Leftrightarrow \gamma_{i,j} > \gamma_{j,k} \Leftrightarrow \gamma_{i,k} > \gamma_{j,k};$$

$$\gamma_{i,j} = \gamma_{i,k} \Leftrightarrow \gamma_{i,j} = \gamma_{j,k} \Leftrightarrow \gamma_{i,k} = \gamma_{j,k}.$$

Доказательство.

$$i < j < k \Rightarrow x_i > x_j > x_k;$$

$$\gamma_{i,j} = -\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}, \gamma_{i,k} = -\frac{y_i - y_k}{x_i - x_k}, \gamma_{j,k} = -\frac{y_j - y_k}{x_j - x_k};$$

$$\gamma_{i,j} - \gamma_{i,k} = -\frac{y_i - y_j}{x_i - x_j} + \frac{y_i - y_k}{x_i - x_k} = \frac{(y_i - y_k)(x_i - x_j) - (y_i - y_j)(x_i - x_k)}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)} =$$

$$= \frac{1}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)} \begin{vmatrix} x_i - x_j & y_i - y_j \\ x_i - x_k & y_i - y_k \end{vmatrix}.$$

Аналогично

$$\gamma_{i,j} - \gamma_{j,k} = \frac{1}{(x_i - x_j)(x_j - x_k)} \begin{vmatrix} x_i - x_j & y_i - y_j \\ x_j - x_k & y_j - y_k \end{vmatrix},$$

$$\gamma_{i,k} - \gamma_{j,k} = \frac{1}{(x_i - x_k)(x_j - x_k)} \begin{vmatrix} x_i - x_k & y_i - y_k \\ x_j - x_k & y_j - y_k \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix}.$$

Если к строчке квадратной матрицы прибавить линейную комбинацию остальных строчек, то её определитель не изменится [12].

Прибавим к первой строчке третью строчку, умноженную на (-1) , а затем прибавим ко второй строчке третью строчку, умноженную на (-1) . Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_i - x_k & y_i - y_k & 0 \\ x_j - x_k & y_j - y_k & 0 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i - x_k & y_i - y_k \\ x_j - x_k & y_j - y_k \end{vmatrix}.$$

Рассуждая по той же схеме, можно показать, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_i - x_j & y_i - y_j \\ x_i - x_k & y_i - y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i - x_j & y_i - y_j \\ x_j - x_k & y_j - y_k \end{vmatrix}.$$

Таким образом,

$$\gamma_{i,j} - \gamma_{i,k} = \frac{\Delta}{(x_i - x_j)(x_i - x_k)},$$

$$\gamma_{i,j} - \gamma_{j,k} = \frac{\Delta}{(x_i - x_j)(x_j - x_k)},$$

$$\gamma_{i,k} - \gamma_{j,k} = \frac{\Delta}{(x_i - x_k)(x_j - x_k)}.$$

Знаменатели всех трёх дробей положительны, поэтому знаки этих дробей совпадают со знаками числителей. Следовательно, знаки разностей $(\gamma_{i,j} - \gamma_{i,k})$, $(\gamma_{i,j} - \gamma_{j,k})$ и $(\gamma_{i,k} - \gamma_{j,k})$ совпадают. Предложение доказано.

Проиллюстрируем предложение 9 геометрически.

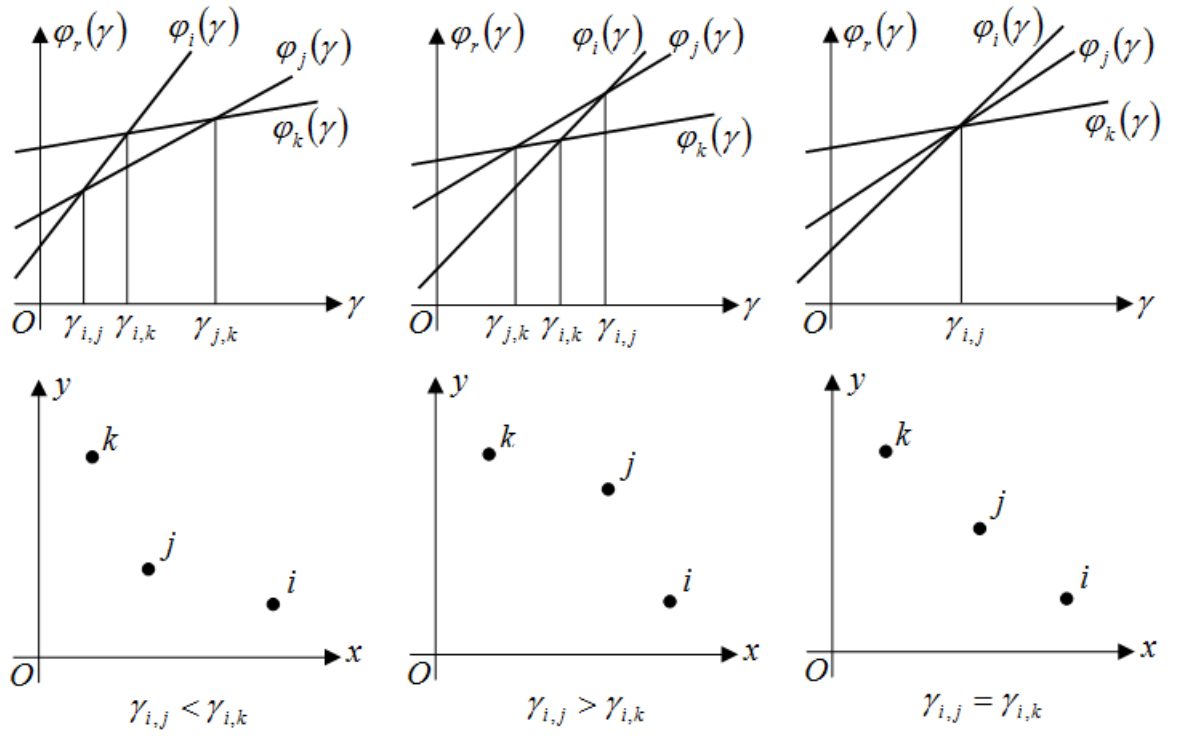


Рис. 18

Замечание. $\gamma_{i,j} > \gamma_{i,k}$, если $p_i p_j p_k$ образуют левый поворот (см. раздел 2.5).

Лемма 1. Пусть

$$b > k_0 > k_1 > \dots > k_{s-1} > k_s = q + 1 > a,$$

$$s \geq 1,$$

$$\gamma_l = \gamma_{k_{l-1}, k_l}, l = 1, \dots, s,$$

$$\forall l = 2, \dots, s: \gamma_{l-1} \leq \gamma_l,$$

$$\psi(\gamma) = \max_{q+1 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma),$$

$$\text{а) } \forall \gamma \in (-\infty, \gamma_1]: \varphi_b(\gamma) \equiv \varphi_{k_0}(\gamma) = \psi(\gamma),$$

$$\text{б) } \forall l = 2, \dots, s: \forall \gamma \in [\gamma_{l-1}, \gamma_l]: \varphi_{k_{l-1}}(\gamma) = \psi(\gamma),$$

$$\text{в) } \forall \gamma \in [\gamma_s, +\infty): \varphi_{q+1}(\gamma) \equiv \varphi_{k_s}(\gamma) = \psi(\gamma).$$

Пусть

$$\chi(\gamma) = \max_{q \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma),$$

$$\max_{0 \leq l \leq s} \gamma_{q, k_l} = \gamma_{q, k_t} = \gamma'.$$

Тогда:

1) если $t = 0$, то

$$\text{а) } \forall \gamma \in (-\infty, \gamma']: \varphi_b(\gamma) \equiv \varphi_{k_0}(\gamma) = \chi(\gamma),$$

$$\text{б) } \forall \gamma \in [\gamma', +\infty): \varphi_q(\gamma) = \chi(\gamma);$$

2) если $t \geq 1$, то

$$\text{а) } \forall \gamma \in (-\infty, \gamma_1]: \varphi_b(\gamma) \equiv \varphi_{k_0}(\gamma) = \chi(\gamma),$$

$$\text{б) } \forall l = 2, \dots, t: \forall \gamma \in [\gamma_{l-1}, \gamma_l]: \varphi_{k_{l-1}}(\gamma) = \chi(\gamma),$$

$$\text{в) } \gamma' \geq \gamma_t, \forall \gamma \in [\gamma_t, \gamma']: \varphi_{k_t}(\gamma) = \chi(\gamma),$$

$$\text{г) } \forall \gamma \in [\gamma', +\infty): \varphi_q(\gamma) = \chi(\gamma).$$

Доказательство.

Докажем, что:

$$1. \quad \forall \gamma \in (-\infty, \gamma'] : \psi(\gamma) = \chi(\gamma);$$

$$2. \quad \forall \gamma \in [\gamma', +\infty) : \varphi_q(\gamma) = \chi(\gamma).$$

$$\forall \gamma \in \mathbb{R} \exists l : \varphi_{k_l}(\gamma) = \psi(\gamma) = \max_{q+1 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma), \text{ т. е. максимум достигается при } r = k_l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall \gamma \in \mathbb{R} : \psi(\gamma) = \max_{0 \leq l \leq s} \varphi_{k_l}(\gamma);$$

$$\chi(\gamma) = \max \{ \psi(\gamma), \varphi_q(\gamma) \}.$$

1. Пусть $\gamma \leq \gamma'$.

$$q < k_t, \gamma \leq \gamma' = \gamma_{q, k_t} \Rightarrow \text{по предложению 8 } \varphi_q(\gamma) \leq \varphi_{k_t}(\gamma) \Rightarrow \psi(\gamma) = \max_{0 \leq l \leq s} \varphi_{k_l}(\gamma) \geq \varphi_{k_t}(\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \chi(\gamma) = \max \{ \psi(\gamma), \varphi_q(\gamma) \} = \psi(\gamma).$$

Итак, $\forall \gamma \in (-\infty, \gamma'] : \psi(\gamma) = \chi(\gamma)$.

2. Пусть $\gamma \geq \gamma'$.

$$\forall l, 0 \leq l \leq s : q < k_l, \gamma \geq \gamma' = \gamma_{q, k_l} \geq \gamma_{q, k_l} \Rightarrow \text{по предложению 8 } \varphi_q(\gamma) \geq \varphi_{k_l}(\gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi_q(\gamma) \geq \max_{0 \leq l \leq s} \varphi_{k_l}(\gamma) = \psi(\gamma) \Rightarrow \chi(\gamma) = \max \{ \psi(\gamma), \varphi_q(\gamma) \} = \varphi_q(\gamma).$$

Итак, $\forall \gamma \in [\gamma', +\infty) : \varphi_q(\gamma) = \chi(\gamma)$.

Докажем, что:

$$1. \quad t = 0 \Rightarrow \gamma' \leq \gamma_{t+1} \equiv \gamma_1;$$

$$2. \quad t = s \Rightarrow \gamma' \geq \gamma_t \equiv \gamma_s;$$

$$3. \quad 0 < t < s \Rightarrow \gamma_t \leq \gamma' \leq \gamma_{t+1}.$$

1. $0 \leq t < s$.

$$q < k_{t+1} < k_t, \gamma_{q, k_{t+1}} \leq \gamma_{q, k_t} \Rightarrow \text{по предложению 9 } \gamma' = \gamma_{q, k_t} \leq \gamma_{k_{t+1}, k_t} = \gamma_{t+1}.$$

2. $0 < t \leq s$.

$$q < k_t < k_{t-1}, \gamma_{q, k_t} \geq \gamma_{q, k_{t-1}} \Rightarrow \text{по предложению 9 } \gamma' = \gamma_{q, k_t} \geq \gamma_{k_t, k_{t-1}} = \gamma_t.$$

Из доказанного следует утверждение леммы.

Проиллюстрируем лемму 1 геометрически.

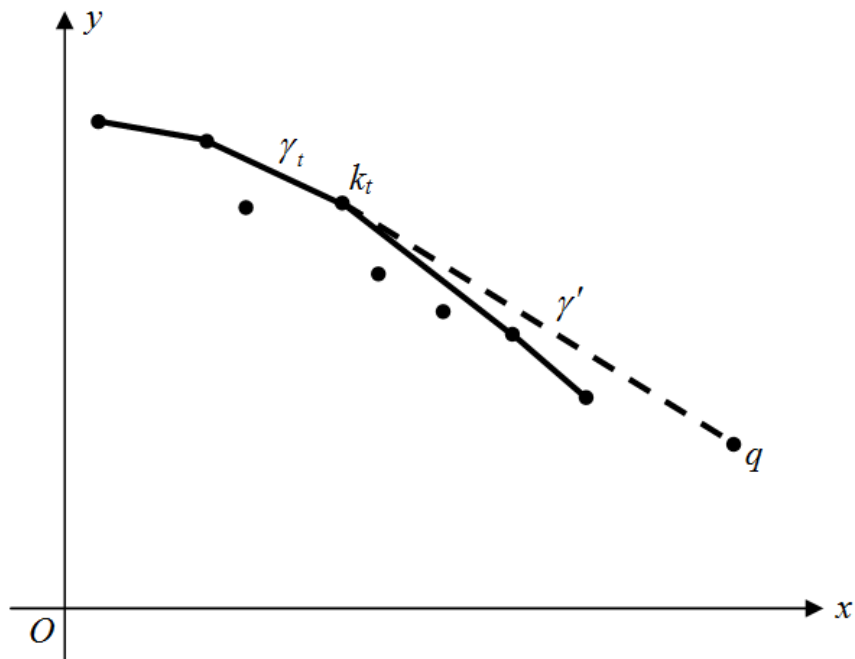


Рис. 19

Пусть выпуклая оболочка множества точек с номерами $b, b-1, \dots, q+1$ уже построена. Требуется построить выпуклую оболочку множества точек с номерами $b, b-1, \dots, q+1, q$. Для этого найдём вершину построенной выпуклой оболочки такую, что полярный угол этой вершины относительно точки с номером q наименьший (если поворачивать против часовой стрелки), и соединим точку с номером q с этой вершиной. Получим выпуклую оболочку множества точек с номерами $b, b-1, \dots, q+1, q$.

Возникает задача вычисления $\max_{0 \leq l \leq s} \gamma_{q, k_l}$.

Будем последовательно просматривать тройки точек. Если $p_q p_{k_i} p_{k_{i-1}}$ образуют правый поворот, то переходим к следующей тройке $p_q p_{k_{i-1}} p_{k_{i-2}}$. Если $p_q p_{k_i} p_{k_{i-1}}$ образуют левый поворот, то $\max_{0 \leq l \leq s} \gamma_{q, k_l} = \gamma_{q, k_i}$.

Предложение 10. $i < j < k < l, \gamma_{i,j} \geq \gamma_{i,k}, \gamma_{j,k} \geq \gamma_{k,l} \Rightarrow \gamma_{i,k} \geq \gamma_{i,l}$.

Доказательство.

$\gamma_{i,j} \geq \gamma_{i,k} \Rightarrow$ по предложению 9 $\gamma_{i,k} \geq \gamma_{j,k}; \gamma_{j,k} \geq \gamma_{k,l} \Rightarrow \gamma_{i,k} \geq \gamma_{k,l} \Rightarrow$ по предложению 9 $\gamma_{i,k} \geq \gamma_{i,l}$.

Замечание. Геометрический смысл предложения 10: если $p_i p_j p_k$ образуют левый поворот и $p_j p_k p_l$ образуют левый поворот, то $p_i p_k p_l$ образуют левый поворот.

Лемма 2. Пусть выполнены условия леммы 1.

Пусть $\gamma_{q, k_s} \leq \gamma_{q, k_{s-1}} \leq \dots \leq \gamma_{q, k_u}, 0 \leq u \leq s$, причём если $u \geq 1$, то $\gamma_{q, k_u} > \gamma_{q, k_{u-1}}$.

Тогда $\max_{0 \leq l \leq s} \gamma_{q, k_l} = \gamma_{q, k_u}$.

Доказательство.

Докажем, что $\gamma_{q, k_u} > \gamma_{q, k_{u-1}} \geq \gamma_{q, k_{u-2}} \geq \dots \geq \gamma_{q, k_0}$.

База индукции. $\gamma_{q, k_u} > \gamma_{q, k_{u-1}}$.

Гипотеза индукции. $\gamma_{q, k_l} \geq \gamma_{q, k_{l-1}}, 2 \leq l \leq u$.

Право перехода. Докажем, что $\gamma_{q, k_{l-1}} \geq \gamma_{q, k_{l-2}}$.

$\gamma_{k_{l-1}, k_l} = \gamma_l \geq \gamma_{l-1} = \gamma_{k_{l-2}, k_{l-1}};$

$q < k_l < k_{l-1} < k_{l-2}, \gamma_{q, k_l} \geq \gamma_{q, k_{l-1}}, \gamma_{k_l, k_{l-1}} \geq \gamma_{k_{l-1}, k_{l-2}} \Rightarrow$ по предложению 10 $\gamma_{q, k_{l-1}} \geq \gamma_{q, k_{l-2}}$.

Итак, $\gamma_{q, k_s} \leq \gamma_{q, k_{s-1}} \leq \dots \leq \gamma_{q, k_u} > \gamma_{q, k_{u-1}} \geq \gamma_{q, k_{u-2}} \geq \dots \geq \gamma_{q, k_0}$.

Следовательно, $\max_{0 \leq l \leq s} \gamma_{q, k_l} = \gamma_{q, k_u}$.

Отсюда получаем алгоритм вычисления $\max_{0 \leq l \leq s} \gamma_{q, k_l} = \gamma_{q, k_t} = \gamma'$.

Алгоритм 2.

$i \leftarrow s;$

while $((i \geq 1) \wedge (\gamma_{q, k_i} \leq \gamma_{q, k_{i-1}}))$ **do**

$i \leftarrow i - 1;$

end

$t \leftarrow i;$

$\gamma' \leftarrow \gamma_{q, k_t};$

Замечание. $\gamma_{i,j} \leq \gamma_{i,k} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 \end{vmatrix} \geq 0$.

Это можно использовать для оптимизации вычислений.

Теорема 7. Пусть

$s^{(2)} = 1, k_0^{(2)} = b, k_1^{(2)} = b - 1,$

$q^{(i)} = b - i,$

$$t^{(i)} : \max_{0 \leq l \leq s^{(i)}} \gamma_{q^{(i)}, k_l^{(i)}} = \gamma_{q^{(i)}, k_{t^{(i)}}^{(i)}} ,$$

$$k_l^{(i+1)} = k_l^{(i)}, l = 0, 1, \dots, t^{(i)},$$

$$k_{t^{(i)+1}^{(i+1)}} = q^{(i)},$$

$$s^{(i+1)} = t^{(i)} + 1.$$

Пусть

$$\gamma_l^{(i)} = \gamma_{k_{l-1}^{(i)}, k_l^{(i)}} ,$$

$$\psi^{(i)}(\gamma) = \max_{q^{(i)+1 \leq r \leq b} } \varphi_r(\gamma).$$

Тогда $\forall i = 2, 3, \dots, b-a+1$:

$$b = k_0^{(i)} > k_1^{(i)} > \dots > k_{s^{(i)}-1}^{(i)} > k_{s^{(i)}}^{(i)} = q^{(i)} + 1 \geq a ,$$

$$s^{(i)} \geq 1 ,$$

$$\forall l = 2, \dots, s^{(i)} : \gamma_{l-1}^{(i)} \leq \gamma_l^{(i)} ,$$

$$\text{а) } \forall \gamma \in (-\infty, \gamma_1^{(i)}] : \varphi_b(\gamma) \equiv \varphi_{k_0^{(i)}}(\gamma) = \psi^{(i)}(\gamma),$$

$$\text{б) } \forall l = 2, \dots, s^{(i)} : \forall \gamma \in [\gamma_{l-1}^{(i)}, \gamma_l^{(i)}] : \varphi_{k_{l-1}^{(i)}}(\gamma) = \psi^{(i)}(\gamma),$$

$$\text{в) } \forall \gamma \in [\gamma_{s^{(i)}}^{(i)}, +\infty) : \varphi_{q^{(i)+1}}(\gamma) \equiv \varphi_{k_{s^{(i)}}^{(i)}}(\gamma) = \psi^{(i)}(\gamma).$$

Доказательство.

База индукции.

$$b = k_0^{(2)} > k_1^{(2)} = b-1 = q^{(2)} + 1 > a ,$$

$$s^{(2)} \geq 1 ,$$

$$\gamma_1^{(2)} = \gamma_{b, b-1} ,$$

$$\forall \gamma \in (-\infty, \gamma_1^{(2)}] : \varphi_b(\gamma) \geq \varphi_{b-1}(\gamma) \text{ (по предложению 8)} \Rightarrow \varphi_b(\gamma) \equiv \varphi_{k_0^{(2)}}(\gamma) = \psi^{(2)}(\gamma),$$

$$\forall \gamma \in [\gamma_1^{(2)}, +\infty) : \varphi_b(\gamma) \leq \varphi_{b-1}(\gamma) \text{ (по предложению 8)} \Rightarrow \varphi_{b-1}(\gamma) \equiv \varphi_{k_{s^{(2)}}^{(2)}}(\gamma) = \psi^{(2)}(\gamma).$$

Гипотеза индукции.

$$b = k_0^{(i)} > k_1^{(i)} > \dots > k_{s^{(i)}-1}^{(i)} > k_{s^{(i)}}^{(i)} = q^{(i)} + 1 > a ,$$

$$s^{(i)} \geq 1 ,$$

$$\forall l = 2, \dots, s^{(i)} : \gamma_{l-1}^{(i)} \leq \gamma_l^{(i)} ,$$

$$\text{а) } \forall \gamma \in (-\infty, \gamma_1^{(i)}] : \varphi_b(\gamma) \equiv \varphi_{k_0^{(i)}}(\gamma) = \psi^{(i)}(\gamma),$$

$$\text{б) } \forall l = 2, \dots, s^{(i)} : \forall \gamma \in [\gamma_{l-1}^{(i)}, \gamma_l^{(i)}] : \varphi_{k_{l-1}^{(i)}}(\gamma) = \psi^{(i)}(\gamma),$$

$$\text{в) } \forall \gamma \in [\gamma_{s^{(i)}}^{(i)}, +\infty) : \varphi_{q^{(i)+1}}(\gamma) \equiv \varphi_{k_{s^{(i)}}^{(i)}}(\gamma) = \psi^{(i)}(\gamma).$$

Право перехода.

$$b = k_0^{(i+1)} > k_1^{(i+1)} > \dots > k_{s^{(i+1)}-1}^{(i+1)} > k_{s^{(i+1)}}^{(i+1)} = q^{(i+1)} + 1 = q^{(i)} \geq a ,$$

$$s^{(i+1)} \geq 1 ;$$

$$\gamma_l^{(i)} = \gamma_l^{(i+1)}, l = 1, 2, \dots, s^{(i+1)} - 1 ,$$

$$\max_{0 \leq l \leq s^{(i)}} \gamma_{q^{(i)}, k_l^{(i)}} = \gamma_{q^{(i)}, k_{t^{(i)}}^{(i)}} = \gamma_{s^{(i+1)}}^{(i+1)} .$$

По лемме 1:

$$\forall l = 2, \dots, s^{(i+1)} : \gamma_{l-1}^{(i+1)} \leq \gamma_l^{(i+1)} ,$$

$$\text{а) } \forall \gamma \in (-\infty, \gamma_1^{(i+1)}] : \varphi_b(\gamma) \equiv \varphi_{k_0^{(i+1)}}(\gamma) = \psi^{(i+1)}(\gamma),$$

$$\text{б) } \forall l = 2, \dots, s^{(i+1)} : \forall \gamma \in [\gamma_{l-1}^{(i+1)}, \gamma_l^{(i+1)}] : \varphi_{k_{l-1}^{(i+1)}}(\gamma) = \psi^{(i+1)}(\gamma),$$

$$в) \forall \gamma \in [\gamma_s^{(i+1)}, +\infty): \varphi_{q^{(i+1)}+1}(\gamma) \equiv \varphi_{k_s^{(i+1)}}(\gamma) = \psi^{(i+1)}(\gamma).$$

Теорема доказана.

Приведём алгоритм.

Пусть имеется дважды связанный список со следующими операциями:

- LAST() — возвращает последний элемент списка;
- PLAST() — возвращает предпоследний элемент списка;
- INSERT(x) — вставляет x в конец списка;
- DELETE() — удаляет из списка последний элемент;
- SIZE() — возвращает количество элементов в списке.

Алгоритм 3.

INSERT(b);

INSERT($b - 1$);

for $q \leftarrow b - 2$ **downto** a **do**

while $((\text{SIZE}() > 1) \wedge (\gamma_{q, \text{LAST}0} \leq \gamma_{q, \text{PLAST}0}))$ **do**

DELETE();

end

INSERT(q);

end

Время выполнения алгоритма — $O(M)$, где $M = b - a + 1$.

Данный алгоритм представляет собой алгоритм Грэхема построения выпуклой оболочки.

Рассмотрим задачу построения ломаной — графика функции $\varphi_{\min}(\gamma)$.

Введём последовательности $\{k_l\}_{l=0}^s$ и $\{\gamma_l\}_{l=1}^s$.

$$\begin{cases} k_0 = b, \\ k_l : \max_{a \leq j < k_{l-1}} \gamma_{k_{l-1}, j} = \gamma_{k_{l-1}, k_l}, l = 1, \dots, s, \\ k_s = a, \end{cases}$$

$$b = k_0 > k_1 > \dots > k_{s-1} > k_s = a,$$

$$s \geq 1,$$

$$\gamma_l = \gamma_{k_{l-1}, k_l}, l = 1, \dots, s.$$

Теорема 6'.

а) $\forall \gamma \in (-\infty, \gamma_s]: \varphi_a(\gamma) \equiv \varphi_{k_s}(\gamma) = \varphi_{\min}(\gamma);$

б) $\forall l = 1, \dots, s-1: \forall \gamma \in [\gamma_{l+1}, \gamma_l]: \varphi_{k_l}(\gamma) = \varphi_{\min}(\gamma);$

в) $\forall \gamma \in [\gamma_1, +\infty): \varphi_b(\gamma) \equiv \varphi_{k_0}(\gamma) = \varphi_{\min}(\gamma).$

Замечание. $\forall l = 1, \dots, s-1: \gamma_{l+1} \leq \gamma_l.$

Следствие. $\varphi_{\min}(\gamma)$ — кусочно-линейная функция.

Приведём алгоритм вычисления последовательностей $\{k_l\}_{l=0}^s$ и $\{\gamma_l\}_{l=1}^s$.

Алгоритм 1'.

$l \leftarrow 0;$

$k_0 \leftarrow b;$

do

$l \leftarrow l + 1;$

$i \leftarrow a;$

$m \leftarrow \gamma_{k_{l-1}, a};$

for $j \leftarrow a + 1$ **to** $k_{l-1} - 1$ **do**

$q \leftarrow \gamma_{k_{l-1}, j};$

if ($q > m$) **then**

$i \leftarrow j$;

$m \leftarrow q$;

end

end

$k_l \leftarrow i$;

$\gamma_l \leftarrow m$;

while ($k_l > a$);

$s \leftarrow l$;

Время выполнения алгоритма — $O(sM)$, где $M = b - a + 1$.

Лемма 1'. Пусть

$b > k_0 > k_1 > \dots > k_{s-1} > k_s = q + 1 > a$,

$s \geq 1$,

$\gamma_l = \gamma_{k_{l-1}, k_l}, l = 1, \dots, s$,

$\forall l = 1, \dots, s-1: \gamma_{l+1} \leq \gamma_l$,

$\psi(\gamma) = \min_{q+1 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$,

а) $\forall \gamma \in (-\infty, \gamma_s]: \varphi_{q+1}(\gamma) \equiv \varphi_{k_s}(\gamma) = \psi(\gamma)$,

б) $\forall l = 1, \dots, s-1: \forall \gamma \in [\gamma_{l+1}, \gamma_l]: \varphi_{k_l}(\gamma) = \psi(\gamma)$,

в) $\forall \gamma \in [\gamma_1, +\infty): \varphi_b(\gamma) \equiv \varphi_{k_0}(\gamma) = \psi(\gamma)$.

Пусть

$\chi(\gamma) = \min_{q \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$,

$\min_{0 \leq l \leq s} \gamma_{q, k_l} = \gamma_{q, k_t} = \gamma'$.

Тогда:

1) если $t = 0$, то

а) $\forall \gamma \in (-\infty, \gamma']: \varphi_q(\gamma) = \chi(\gamma)$,

б) $\forall \gamma \in [\gamma', +\infty): \varphi_b(\gamma) \equiv \varphi_{k_0}(\gamma) = \chi(\gamma)$;

2) если $t \geq 1$, то

а) $\forall \gamma \in (-\infty, \gamma']: \varphi_q(\gamma) = \chi(\gamma)$,

б) $\gamma' \leq \gamma_t, \forall \gamma \in [\gamma', \gamma_t]: \varphi_{k_t}(\gamma) = \chi(\gamma)$,

в) $\forall l = 1, \dots, t-1: \forall \gamma \in [\gamma_{l+1}, \gamma_l]: \varphi_{k_l}(\gamma) = \chi(\gamma)$,

г) $\forall \gamma \in [\gamma_1, +\infty): \varphi_b(\gamma) \equiv \varphi_{k_0}(\gamma) = \chi(\gamma)$.

Возникает задача вычисления $\min_{0 \leq l \leq s} \gamma_{q, k_l}$.

Лемма 2'. Пусть выполнены условия леммы 1'.

Пусть $\gamma_{q, k_s} \geq \gamma_{q, k_{s-1}} \geq \dots \geq \gamma_{q, k_u}, 0 \leq u \leq s$, причём если $u \geq 1$, то $\gamma_{q, k_u} < \gamma_{q, k_{u-1}}$.

Тогда $\min_{0 \leq l \leq s} \gamma_{q, k_l} = \gamma_{q, k_u}$.

Отсюда получаем алгоритм вычисления $\min_{0 \leq l \leq s} \gamma_{q, k_l} = \gamma_{q, k_t} = \gamma'$.

Алгоритм 2'.

$i \leftarrow s$;

while $((i \geq 1) \wedge (\gamma_{q, k_i} \geq \gamma_{q, k_{i-1}}))$ **do**

$i \leftarrow i - 1$;

end

$t \leftarrow i$;

$\gamma' \leftarrow \gamma_{q, k_t}$;

Теорема 7'. Пусть

$$s^{(2)} = 1, k_0^{(2)} = b, k_1^{(2)} = b - 1,$$

$$q^{(i)} = b - i,$$

$$t^{(i)} : \min_{0 \leq l \leq s^{(i)}} \gamma_{q^{(i)}, k_l^{(i)}} = \gamma_{q^{(i)}, k_{t^{(i)}}^{(i)}},$$

$$k_l^{(i+1)} = k_l^{(i)}, l = 0, 1, \dots, t^{(i)},$$

$$k_{t^{(i)+1}^{(i+1)}} = q^{(i)},$$

$$s^{(i+1)} = t^{(i)} + 1.$$

Пусть

$$\gamma_l^{(i)} = \gamma_{k_{l-1}^{(i)}, k_l^{(i)}},$$

$$\psi^{(i)}(\gamma) = \min_{q^{(i)+1 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma).$$

Тогда $\forall i = 2, 3, \dots, b - a + 1$:

$$b = k_0^{(i)} > k_1^{(i)} > \dots > k_{s^{(i)}-1}^{(i)} > k_{s^{(i)}}^{(i)} = q^{(i)} + 1 \geq a,$$

$$s^{(i)} \geq 1,$$

$$\forall l = 1, \dots, s^{(i)} - 1 : \gamma_{l+1}^{(i)} \leq \gamma_l^{(i)},$$

$$a) \forall \gamma \in (-\infty, \gamma_{s^{(i)}}^{(i)}] : \varphi_{q^{(i)+1}(\gamma) \equiv \varphi_{k_{s^{(i)}}^{(i)}}(\gamma) = \psi^{(i)}(\gamma),$$

$$б) \forall l = 1, \dots, s^{(i)} - 1 : \forall \gamma \in [\gamma_{l+1}^{(i)}, \gamma_l^{(i)}] : \varphi_{k_l^{(i)}}(\gamma) = \psi^{(i)}(\gamma),$$

$$в) \forall \gamma \in [\gamma_1^{(i)}, +\infty) : \varphi_b(\gamma) \equiv \varphi_{k_0^{(i)}}(\gamma) = \psi^{(i)}(\gamma).$$

Приведём алгоритм.

Алгоритм 3'

INSERT(b);

INSERT($b - 1$);

for $q \leftarrow b - 2$ **downto** a **do**

while $((\text{SIZE}() > 1) \wedge (\gamma_{q, \text{LAST0}} \geq \gamma_{q, \text{PLAST0}}))$ **do**

DELETE();

end

INSERT(q);

end

Время выполнения алгоритма — $O(M)$, где $M = b - a + 1$.

Для того чтобы вычислить $\delta_{\min}(0, \infty)$, нужно построить ломаную — график функции $\varphi(\gamma)$, — затем найти число $\min_{\gamma \in \mathbb{R}} \varphi(\gamma)$, равное наименьшей из ординат вершин данной ломаной, а затем воспользоваться формулой

$$\delta_{\min}(0, \infty) = \frac{1}{2} \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \varphi(\gamma).$$

Абсциссы вершин ломаной — графика функции $\varphi(\gamma)$ — получаются в результате объединения абсцисс вершин ломаной — графика функции $\varphi_{\max}(\gamma)$ — и абсцисс вершин ломаной — графика функции $\varphi_{\min}(\gamma)$.

$\varphi_{\max}(\gamma)$ — кусочно-линейная функция:

$$b = k'_0 > k'_1 > \dots > k'_{s'-1} > k'_{s'} = a,$$

$$s' \geq 1,$$

$$\gamma'_1 \leq \gamma'_2 \leq \dots \leq \gamma'_{s'},$$

$$\forall \gamma \in (-\infty, \gamma'_1] : \varphi_b(\gamma) \equiv \varphi_{k'_0}(\gamma) = \varphi_{\max}(\gamma),$$

$$\forall l = 2, \dots, s' : \forall \gamma \in [\gamma'_{l-1}, \gamma'_l] : \varphi_{k'_{l-1}}(\gamma) = \varphi_{\max}(\gamma),$$

$$\forall \gamma \in [\gamma'_{s'}, +\infty) : \varphi_a(\gamma) \equiv \varphi_{k'_{s'}}(\gamma) = \varphi_{\max}(\gamma).$$

$\varphi_{\min}(\gamma)$ — кусочно-линейная функция:

$$b = k_0'' > k_1'' > \dots > k_{s''-1}'' > k_{s''}'' = a,$$

$$s'' \geq 1,$$

$$\gamma_{s''}'' \leq \gamma_{s''-1}'' \leq \dots \leq \gamma_1'',$$

$$\forall \gamma \in (-\infty, \gamma_{s''}'']: \varphi_a(\gamma) \equiv \varphi_{k_{s''}''}(\gamma) = \varphi_{\min}(\gamma),$$

$$\forall l = 1, \dots, s'' - 1: \forall \gamma \in [\gamma_{l+1}'', \gamma_l'']: \varphi_{k_l''}(\gamma) = \varphi_{\min}(\gamma),$$

$$\forall \gamma \in [\gamma_1'', +\infty): \varphi_b(\gamma) \equiv \varphi_{k_0''}(\gamma) = \varphi_{\min}(\gamma).$$

Применим алгоритм слияния двух неубывающих числовых последовательностей.

Алгоритм 4.

$$i \leftarrow 0;$$

$$j \leftarrow s'';$$

$$\gamma \leftarrow \min\{\gamma'_{i+1}, \gamma''_j\};$$

$$m \leftarrow \varphi_{k_i'}(\gamma) - \varphi_{k_j''}(\gamma);$$

while $((i < s') \wedge (j > 0))$ **do**

if $(i = s')$ **then**

$$\quad \gamma \leftarrow \gamma''_j;$$

$$\quad j \leftarrow j - 1;$$

else if $(j = 0)$ **then**

$$\quad \gamma \leftarrow \gamma'_{i+1};$$

$$\quad i \leftarrow i + 1;$$

else

$$\quad \gamma' \leftarrow \gamma'_{i+1};$$

$$\quad \gamma'' \leftarrow \gamma''_j;$$

if $(\gamma' \leq \gamma'')$ **then**

$$\quad \gamma \leftarrow \gamma';$$

$$\quad i \leftarrow i + 1;$$

else

$$\quad \gamma \leftarrow \gamma'';$$

$$\quad j \leftarrow j - 1;$$

end

end

$$\varphi' \leftarrow \varphi_{k_i'}(\gamma);$$

$$\varphi'' \leftarrow \varphi_{k_j''}(\gamma);$$

$$\varphi \leftarrow \varphi' - \varphi'';$$

if $(\varphi < m)$ **then**

$$\quad m \leftarrow \varphi;$$

end

end

$$\delta_{\min}(0, \infty) \leftarrow \frac{m}{2};$$

2.10. Вычисление матрицы $\{\delta_{\min}^{a,b}(0, \infty)\}_{[a..b] \in T}$

Требуется вычислить $\delta_{\min}^{a,b}(0, \infty)$ для каждого промежутка $[a..b] \in T$.

Зафиксируем b и рассмотрим задачу вычисления $\delta_{\min}(0, \infty)$ для промежутков $[b - 2..b]$, $[b - 3..b]$, ..., $[1..b]$.

Теоремы 7 и 7' позволяют построить алгоритм построения ломаных — графиков функций $\varphi_{\max}(\gamma)$ и $\varphi_{\min}(\gamma)$ — сразу для всех этих промежутков с временем выполнения $O(n)$. Найти $\delta_{\min}(0, \infty)$ для каждого из этих промежутков можно за время $O(n)$. Таким образом, задачу вычисления $\delta_{\min}(0, \infty)$ для промежутков $[b-2\dots b]$, $[b-3\dots b]$, ..., $[1\dots b]$ можно решить за время $O(n^2)$. А значит, вычислить матрицу $\{\delta_{\min}^{a,b}(0, \infty)\}_{[a\dots b] \in T}$ можно за время $O(n^3)$.

2.11. Вычисление $\delta_{\min}(v_0, \infty)$

Рассмотрим точки промежутка $[a\dots b]$:

$$\{(x_r, y_r)\}_{r=a}^b, b-a+1 \geq 3,$$

$$x_a > x_{a+1} > \dots > x_b,$$

$$y_a \leq y_{a+1} \leq \dots \leq y_b.$$

Пусть v_0 — целое число, удовлетворяющее неравенству

$$0 \leq v_0 \leq b-a+1.$$

Введём обозначения: $\max_j z_i$ — j -й по максимальности элемент последовательности $\{z_i\}$, $\min_j z_i$ — j -й по минимальности элемент последовательности $\{z_i\}$.

Требуется вычислить значение величины

$$\delta_{\min}(v_0, \infty) = \inf_{(\gamma, c) \in \mathbb{R}^2} \max_{a \leq r \leq b} |p_\gamma(x_r, y_r) - c|.$$

Заметим, что в случае, когда $v_0 = b-a+1$, имеем $\delta_{\min}(v_0, \infty) = 0$.

Далее будем рассматривать случай

$$0 \leq v_0 < b-a+1.$$

Предложение 11. Пусть

$$\forall x' \in X \exists \min_{y \in Y} f(x', y),$$

$$\forall y' \in Y \exists \min_{x \in X} f(x, y'),$$

$$\exists \min_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = a.$$

Тогда $\exists \min_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) = a$.

Доказательство.

$$\min_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = a \Rightarrow \exists x_0 \in X : \min_{y \in Y} f(x_0, y) \geq \min_{y \in Y} f(x_0, y) = a \quad \forall x \in X;$$

$$\min_{y \in Y} f(x_0, y) = a \Rightarrow \exists y_0 \in Y : \min_{y \in Y} f(x_0, y) \geq f(x_0, y_0) = a \quad \forall y \in Y.$$

Итак, $\forall x \in X, y \in Y : f(x, y) \geq f(x_0, y_0) = a$.

Следовательно, $\min_{x \in X} f(x, y) \geq \min_{x \in X} f(x, y_0) = a \quad \forall y \in Y \Rightarrow \exists \min_{y \in Y} \min_{x \in X} f(x, y) = a$.

Предложение 12. Пусть $0 \leq v_0 < n$.

$$\exists \min_{c \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq i \leq n} |q_i - c| = \frac{1}{2} \min_{0 \leq v \leq v_0} \left(\max_{1 \leq i \leq n} q_i - \min_{1 \leq i \leq n} q_i \right).$$

Доказательство.

Пусть $q_1 \leq q_2 \leq \dots \leq q_n$.

$$\forall c \in \mathbb{R} : \max_{1 \leq i \leq n} |q_i - c| = \min_{0 \leq v \leq v_0} \max_{1+v_0-v \leq i \leq n-v} |q_i - c|;$$

$$\min_{c \in \mathbb{R}} \max_{1 \leq i \leq n} |q_i - c| = \min_{c \in \mathbb{R}} \min_{0 \leq v \leq v_0} \max_{1+v_0-v \leq i \leq n-v} |q_i - c| = \min_{0 \leq v \leq v_0} \min_{c \in \mathbb{R}} \max_{1+v_0-v \leq i \leq n-v} |q_i - c| =$$

$$= \frac{1}{2} \min_{0 \leq v \leq v_0} \left(\max_{1+v_0-v \leq i \leq n-v} q_i - \min_{1+v_0-v \leq i \leq n-v} q_i \right) = \frac{1}{2} \min_{0 \leq v \leq v_0} \left(\max_{1 \leq i \leq n} q_i - \min_{1 \leq i \leq n} q_i \right).$$

Из предложения 11 следует, что

$$\forall \gamma \in \mathbb{R} \exists \min_{c \in \mathbb{R}} \max_{a \leq r \leq b}^{v_0+1} |p_\gamma(x_r, y_r) - c| = \frac{1}{2} \min_{0 \leq \nu \leq \nu_0} \left(\max_{a \leq r \leq b}^{v+1} p_\gamma(x_r, y_r) - \min_{a \leq r \leq b}^{v_0-\nu+1} p_\gamma(x_r, y_r) \right).$$

По предложению 3, если

$$\exists \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \min_{c \in \mathbb{R}} \max_{a \leq r \leq b}^{v_0+1} |p_\gamma(x_r, y_r) - c| = \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} \min_{0 \leq \nu \leq \nu_0} \left(\max_{a \leq r \leq b}^{v+1} p_\gamma(x_r, y_r) - \min_{a \leq r \leq b}^{v_0-\nu+1} p_\gamma(x_r, y_r) \right) \right),$$

то

$$\exists \inf_{(\gamma, c) \in \mathbb{R}^2} \max_{a \leq r \leq b}^{v_0+1} |p_\gamma(x_r, y_r) - c| = \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \min_{c \in \mathbb{R}} \max_{a \leq r \leq b}^{v_0+1} |p_\gamma(x_r, y_r) - c|.$$

По предложению 11 (если положить $X = \{0, 1, \dots, \nu_0\}$, $Y = \mathbb{R}$, $x \equiv \nu$, $y \equiv \gamma$), если

$$\forall \nu, 0 \leq \nu \leq \nu_0 : \exists \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \left(\max_{a \leq r \leq b}^{v+1} p_\gamma(x_r, y_r) - \min_{a \leq r \leq b}^{v_0-\nu+1} p_\gamma(x_r, y_r) \right),$$

то

$$\begin{aligned} & \exists \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} \min_{0 \leq \nu \leq \nu_0} \left(\max_{a \leq r \leq b}^{v+1} p_\gamma(x_r, y_r) - \min_{a \leq r \leq b}^{v_0-\nu+1} p_\gamma(x_r, y_r) \right) \right) = \\ & = \frac{1}{2} \min_{0 \leq \nu \leq \nu_0} \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \left(\max_{a \leq r \leq b}^{v+1} p_\gamma(x_r, y_r) - \min_{a \leq r \leq b}^{v_0-\nu+1} p_\gamma(x_r, y_r) \right), \end{aligned}$$

а значит,

$$\exists \inf_{(\gamma, c) \in \mathbb{R}^2} \max_{a \leq r \leq b}^{v_0+1} |p_\gamma(x_r, y_r) - c| = \frac{1}{2} \min_{0 \leq \nu \leq \nu_0} \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \left(\max_{a \leq r \leq b}^{v+1} p_\gamma(x_r, y_r) - \min_{a \leq r \leq b}^{v_0-\nu+1} p_\gamma(x_r, y_r) \right).$$

Рассмотрим следующие функции:

$$\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) = \max_{a \leq r \leq b}^{v+1} \varphi_r(\gamma),$$

$$\varphi_{\min}^{(\nu)}(\gamma) = \min_{a \leq r \leq b}^{v+1} \varphi_r(\gamma),$$

$$\varphi_{(\nu)}(\gamma) = \varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma) - \varphi_{\min}^{(v_0-\nu)}(\gamma).$$

$\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)$ и $\varphi_{\min}^{(v_0-\nu)}(\gamma)$ — кусочно-линейные функции \Rightarrow

\Rightarrow по предложению 5 $\varphi_{(\nu)}(\gamma)$ — кусочно-линейная функция; кроме того, $\forall \gamma \in \mathbb{R} : \varphi_{(\nu)}(\gamma) \geq 0$

\Rightarrow по предложению 7

$$\exists \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \varphi_{(\nu)}(\gamma) = \min \{ \varphi_{(\nu)}(a_1), \varphi_{(\nu)}(a_2), \dots, \varphi_{(\nu)}(a_m) \}.$$

Итак,

$$\forall \nu, 0 \leq \nu \leq \nu_0 : \exists \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \varphi_{(\nu)}(\gamma) = \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \left(\max_{a \leq r \leq b}^{v+1} p_\gamma(x_r, y_r) - \min_{a \leq r \leq b}^{v_0-\nu+1} p_\gamma(x_r, y_r) \right).$$

Следовательно,

$$\delta_{\min}(v_0, \infty) = \inf_{(\gamma, c) \in \mathbb{R}^2} \max_{a \leq r \leq b}^{v_0+1} |p_\gamma(x_r, y_r) - c| = \frac{1}{2} \min_{0 \leq \nu \leq \nu_0} \min_{\gamma \in \mathbb{R}} \varphi_{(\nu)}(\gamma).$$

Рассмотрим задачу вычисления $\min_{\gamma \in \mathbb{R}} \varphi_{(\nu)}(\gamma)$, $\nu = 0, 1, \dots, \nu_0$.

Чтобы найти $\min_{\gamma \in \mathbb{R}} \varphi_{(\nu)}(\gamma)$, нужно построить ломаные — графики функций $\varphi_{\max}^{(\nu)}(\gamma)$ и $\varphi_{\min}^{(v_0-\nu)}(\gamma)$ — и объединить абсциссы вершин этих двух ломаных — получим абсциссы вершин ломаной — графика функции $\varphi_{(\nu)}(\gamma)$; $\min_{\gamma \in \mathbb{R}} \varphi_{(\nu)}(\gamma)$ равняется наименьшей из ординат вершин данной ломаной.

Таким образом, для вычисления $\delta_{\min}(v_0, \infty)$ нужно построить ломаные — графики функций $\varphi_{\max}^{(0)}(\gamma)$, $\varphi_{\max}^{(1)}(\gamma)$, ..., $\varphi_{\max}^{(\nu_0)}(\gamma)$ и $\varphi_{\min}^{(0)}(\gamma)$, $\varphi_{\min}^{(1)}(\gamma)$, ..., $\varphi_{\min}^{(\nu_0)}(\gamma)$.

Рассмотрим задачу построения ломаных — графиков функций $\varphi_{\max}^{(0)}(\gamma)$, $\varphi_{\max}^{(1)}(\gamma)$, ..., $\varphi_{\max}^{(\nu_0)}(\gamma)$.

Опишем алгоритм построения ломаных.

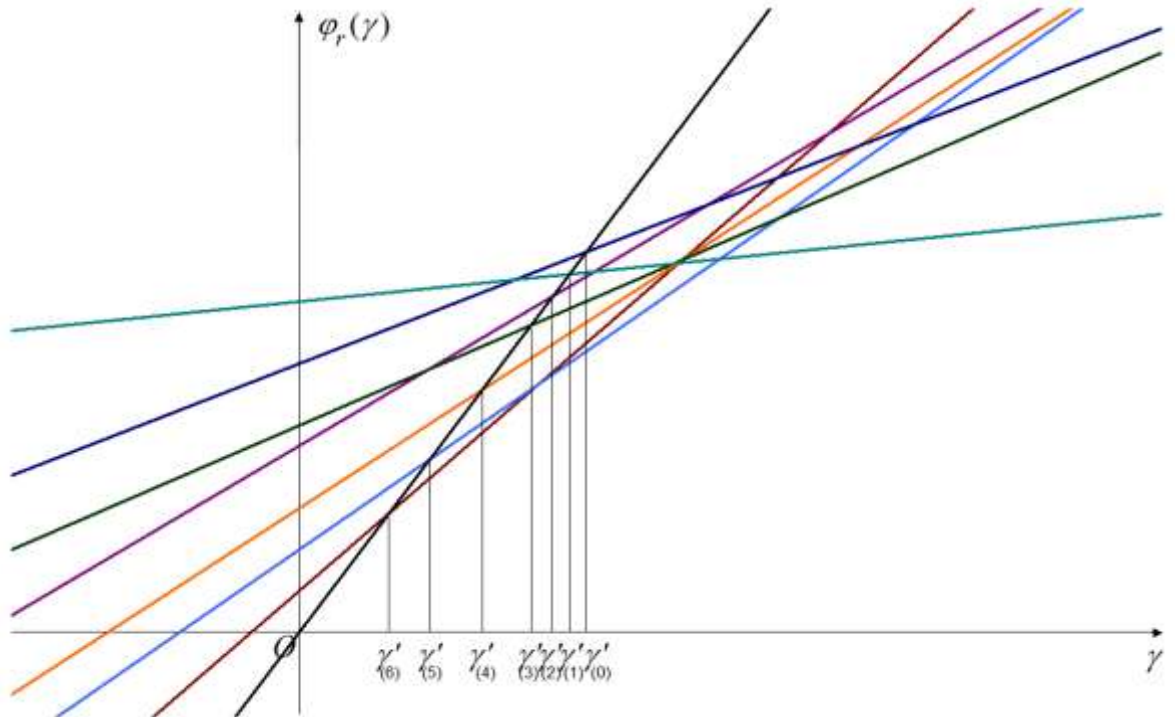


Рис. 20

Будем добавлять прямые по одной: сначала $\varphi_b(\gamma)$, затем $\varphi_{b-1}(\gamma)$, ..., $\varphi_a(\gamma)$. Будем последовательно находить $\max_{q \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$ ($\nu = 0, 1, \dots, \nu_0$) для $q = b-2, b-3, \dots, a$.

Предположим, что ломаные — графики функций $\max_{q+1 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$ ($\nu = 0, 1, \dots, \nu_0$) — уже построены. Укажем, как построить ломаные — графики функций $\max_{q \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$ ($\nu = 0, 1, \dots, \nu_0$).

Можно показать, что прямая — график функции $\varphi_q(\gamma)$ — пересекает каждую из ломаных — графиков функций $\max_{q+1 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$ ($\nu = 0, 1, \dots, \nu_0$) — ровно в одной точке с абсциссой $\gamma'_{(\nu)}$.

Ломаные — графики функций $\max_{q+1 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$ ($\nu = 0, 1, \dots, \nu_0$) — можно получить следующим образом. Ломаная — график функции $\max_{q \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$ — на промежутке $(-\infty, \gamma'_{(0)})$ совпадает с ломаной — графиком функции $\max_{q+1 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$, — а на промежутке $[\gamma'_{(0)}, +\infty)$ — с прямой — графиком функции $\varphi_q(\gamma)$. Ломаная — график функции $\max_{q \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$ — на промежутке $(-\infty, \gamma'_{(1)})$ совпадает с ломаной — графиком функции $\max_{q+1 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$, — на промежутке $[\gamma'_{(1)}, \gamma'_{(0)})$ — с прямой — графиком функции $\varphi_q(\gamma)$, — а на промежутке $[\gamma'_{(0)}, +\infty)$ — с ломаной — графиком функции $\max_{q+1 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$. Ломаная — график функции

$\max_{q \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$ — на промежутке $(-\infty, \gamma'_{(v)})$ совпадает с ломаной — графиком функции $\max_{q+1 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$, — на промежутке $[\gamma'_{(v)}, \gamma'_{(v-1)}]$ — с прямой — графиком функции $\varphi_q(\gamma)$, — а на промежутке $[\gamma'_{(v-1)}, +\infty)$ — с ломаной — графиком функции $\max_{q+1 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma)$.

Теорема 8. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, и пусть значения этой функции на концах сегмента $f(a)$ и $f(b)$ суть числа разных знаков. Тогда внутри сегмента $[a, b]$ найдётся такая точка ξ , значение функции в которой равно нулю [7].

Предложение 13. Пусть $f(x)$ — кусочно-линейная функция, $\varphi(x) = kx + b$, $\forall i = 0, \dots, m: k_i < k$. Тогда $\exists x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in (-\infty, x_0): f(x) > \varphi(x),$$

$$f(x_0) = \varphi(x_0),$$

$$\forall x \in (x_0, +\infty): f(x) < \varphi(x).$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - \varphi(x)$. Докажем, что $h(x)$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$ и строго убывает на $(-\infty, +\infty)$.

Если x_1 не совпадает ни с одной из точек a_i , то $h(x)$ непрерывна в точке x_1 , так как $h(x)$ есть линейная функция в окрестности точки x_1 . В точках a_i функция $h(x)$ также непрерывна, так как предел слева равен пределу справа. Следовательно, $h(x)$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$.

Пусть $x_1 < x_2$. Если $\exists i: x_1, x_2 \in [a_i, a_{i+1}]$ или $x_1, x_2 \in (-\infty, a_1]$ или $x_1, x_2 \in [a_m, +\infty)$, то на данном промежутке $h(x) = (k_j - k)x + (b_j - b)$ — строго убывает, так как $k_j - k < 0$. Если x_1 и x_2 принадлежат разным промежуткам, то можно пройти от одного промежутка до другого через концы промежутков, составив цепочку неравенств. Получим, что $\forall x_1, x_2, x_1 < x_2: h(x_1) > h(x_2)$. Следовательно, $h(x)$ строго убывает на $(-\infty, +\infty)$.

На $-\infty$ и на $+\infty$ $h(x)$ — линейная функция с отрицательным угловым коэффициентом. Значит, $\exists a, b \in \mathbb{R}: h(a) > 0, h(b) < 0$. $h(x)$ непрерывна на $[a, b] \Rightarrow$ по теореме 8 $\exists x_0: h(x_0) = 0$. В силу строгого убывания функции $h(x) \forall x \in (-\infty, x_0): h(x) > 0, \forall x \in (x_0, +\infty): h(x) < 0$.

Определение. Точку x_0 будем называть *абсциссой точки пересечения ломаной — графика функции $f(x)$ — и прямой — графика функции $\varphi(x)$* — и обозначать $P(f, \varphi)$.

Рассмотрим задачу вычисления $P(f, \varphi)$.

Лемма 3. Пусть

$$j = \begin{cases} 0, & \text{если } \forall i = 1, \dots, m: f(a_i) \leq \varphi(a_i), \\ \max \{i \mid f(a_i) > \varphi(a_i)\} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда:

$$1) \text{ если } j = 0, \text{ то } P(f, \varphi) \in (-\infty, a_1],$$

$$2) \text{ если } 0 < j < m, \text{ то } P(f, \varphi) \in [a_j, a_{j+1}],$$

$$3) \text{ если } j = m, \text{ то } P(f, \varphi) \in [a_m, +\infty),$$

$$P(f, \varphi) = -\frac{b_j - b}{k_j - k}.$$

Доказательство.

$$1) j = 0.$$

$$\forall i, i = 1, \dots, m: f(a_i) \leq \varphi(a_i) \Rightarrow f(a_1) \leq \varphi(a_1) \Rightarrow a_1 \geq P(f, \varphi) \Rightarrow P(f, \varphi) \in (-\infty, a_1].$$

Обозначим $x_0 = P(f, \varphi)$.

$$f(x_0) = \varphi(x_0) \Leftrightarrow k_0 x_0 + b_0 = k x_0 + b \Leftrightarrow x_0 = -\frac{b_0 - b}{k_0 - k}.$$

$$2) 0 < j < m.$$

$$j = \max \{i \mid f(a_i) > \varphi(a_i)\} \Rightarrow f(a_j) > \varphi(a_j), f(a_{j+1}) \leq \varphi(a_{j+1});$$

$$f(a_j) > \varphi(a_j) \Rightarrow a_j < P(f, \varphi),$$

$$f(a_{j+1}) \leq \varphi(a_{j+1}) \Rightarrow a_{j+1} \geq P(f, \varphi).$$

Итак, $a_j \leq P(f, \varphi) \leq a_{j+1}$.

$$P(f, \varphi) = -\frac{b_j - b}{k_j - k}.$$

3) $j = m$.

$$\max \{i \mid f(a_i) > \varphi(a_i)\} = m \Rightarrow f(a_m) > \varphi(a_m) \Rightarrow a_m < P(f, \varphi) \Rightarrow P(f, \varphi) \in [a_m, +\infty);$$

$$P(f, \varphi) = -\frac{b_m - b}{k_m - k}.$$

Приведём алгоритм вычисления $P(f, \varphi)$.

Алгоритм 5.

$i \leftarrow m$;

while $((i > 0) \wedge (f(a_i) \leq \varphi(a_i)))$ **do**

$i \leftarrow i - 1$;

end

$j \leftarrow i$;

$$P(f, \varphi) \leftarrow -\frac{b_j - b}{k_j - k};$$

Лемма 4. Пусть

$$b > k_0^{(v)} > k_1^{(v)} > \dots > k_{s(v)-1}^{(v)} > k_{s(v)}^{(v)} = q + 1 > a,$$

$$s(v) \geq 1,$$

$$\gamma_l^{(v)} = \gamma_{k_{l-1}^{(v)}, k_l^{(v)}}, l = 1, \dots, s(v),$$

$$\forall l = 2, \dots, s(v) : \gamma_{l-1}^{(v)} \leq \gamma_l^{(v)},$$

$$\psi_{(v)}(\gamma) = \max_{\substack{v+1 \\ q+1 \leq r \leq b}} \varphi_r(\gamma),$$

$$\text{а) } \forall \gamma \in (-\infty, \gamma_1^{(v)}]: \varphi_b(\gamma) \equiv \varphi_{k_0^{(v)}}(\gamma) = \psi_{(v)}(\gamma),$$

$$\text{б) } \forall l = 2, \dots, s(v) : \forall \gamma \in [\gamma_{l-1}^{(v)}, \gamma_l^{(v)}]: \varphi_{k_{l-1}^{(v)}}(\gamma) = \psi_{(v)}(\gamma),$$

$$\text{в) } \forall \gamma \in [\gamma_{s(v)}^{(v)}, +\infty): \varphi_{q+1}(\gamma) \equiv \varphi_{k_{s(v)}^{(v)}}(\gamma) = \psi_{(v)}(\gamma).$$

Пусть

$$\chi_{(v)}(\gamma) = \max_{q \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma),$$

$$\gamma'_{(v)} = P(\psi_{(v)}, \varphi_q).$$

Тогда:

1) если $v < b - q$, то

$$\text{а) } \forall \gamma \in (-\infty, \gamma'_{(v)}]: \psi_{(v)}(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma),$$

$$\text{б) } \forall \gamma \in [\gamma'_{(v)}, \gamma'_{(v-1)}]: \varphi_q(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma),$$

$$\text{в) } \forall \gamma \in [\gamma'_{(v-1)}, +\infty): \psi_{(v-1)}(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma);$$

2) если $v = b - q$, то

$$\text{а) } \forall \gamma \in (-\infty, \gamma'_{(v-1)}]: \varphi_q(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma),$$

$$\text{б) } \forall \gamma \in [\gamma'_{(v-1)}, +\infty): \psi_{(v-1)}(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma).$$

Доказательство.

1) $v < b - q$.

Если $\varphi_q(\gamma) \leq \psi_{(v)}(\gamma)$, то $\psi_{(v)}(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma)$.

Если $\psi_{(v)}(\gamma) \leq \varphi_q(\gamma) \leq \psi_{(v-1)}(\gamma)$, то $\varphi_q(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma)$.

Если $\varphi_q(\gamma) \geq \psi_{(v-1)}(\gamma)$, то $\psi_{(v-1)}(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma)$.

а) Пусть $\gamma \leq \gamma'_{(v)} = P(\psi_{(v)}, \varphi_q)$.

По лемме 3 $\varphi_q(\gamma) \leq \psi_{(v)}(\gamma) \Rightarrow \psi_{(v)}(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma)$.

б) Пусть $\gamma'_{(v)} \leq \gamma \leq \gamma'_{(v-1)}$.

$\gamma \geq \gamma'_{(v)} = P(\psi_{(v)}, \varphi_q) \Rightarrow$ по лемме 3 $\psi_{(v)}(\gamma) \leq \varphi_q(\gamma)$;

$\gamma \leq \gamma'_{(v-1)} = P(\psi_{(v-1)}, \varphi_q) \Rightarrow$ по лемме 3 $\varphi_q(\gamma) \leq \psi_{(v-1)}(\gamma)$.

Итак, $\psi_{(v)}(\gamma) \leq \varphi_q(\gamma) \leq \psi_{(v-1)}(\gamma) \Rightarrow \varphi_q(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma)$.

в) Пусть $\gamma \geq \gamma'_{(v-1)} = P(\psi_{(v-1)}, \varphi_q)$.

По лемме 3 $\varphi_q(\gamma) \geq \psi_{(v-1)}(\gamma) \Rightarrow \psi_{(v-1)}(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma)$.

2) $v = b - q$.

Если $\varphi_q(\gamma) \leq \psi_{(v-1)}(\gamma)$, то $\varphi_q(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma)$.

Если $\varphi_q(\gamma) \geq \psi_{(v-1)}(\gamma)$, то $\psi_{(v-1)}(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma)$.

а) Пусть $\gamma \leq \gamma'_{(v-1)} = P(\psi_{(v-1)}, \varphi_q)$.

По лемме 3 $\varphi_q(\gamma) \leq \psi_{(v-1)}(\gamma) \Rightarrow \varphi_q(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma)$.

б) Пусть $\gamma \geq \gamma'_{(v-1)} = P(\psi_{(v-1)}, \varphi_q)$.

По лемме 3 $\varphi_q(\gamma) \geq \psi_{(v-1)}(\gamma) \Rightarrow \psi_{(v-1)}(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma)$.

Приведём алгоритм.

Пусть $k_{(0)}, k_{(1)}, \dots, k_{(v_0)}$ — дважды связанные списки со следующими операциями:

- LAST() — возвращает указатель на последний элемент списка;
- INSERT(x) — вставляет x в конец списка.

Для элементов списка определены операции:

- PREV() — возвращает указатель на предшествующий элемент;
- NEXT() — возвращает указатель на следующий элемент.

Операция **new**(x) создаёт узел, содержащий x . Знаком \uparrow обозначена операция разыменования указателя.

Алгоритм 6.

$k_{(0)}$.INSERT(b);

$k_{(0)}$.INSERT($b - 1$);

$k_{(1)}$.INSERT($b - 1$);

$k_{(1)}$.INSERT(b);

for $q \leftarrow b - 2$ **downto** a **do**

$t \leftarrow \mathbf{nil}$;

for $v \leftarrow 0$ **to** v_0 **do**

if ($v = b - q$) **then**

$k_{(v)}$.INSERT(q);

$k_{(v)}$.LAST() \uparrow .NEXT() $\leftarrow t$;

$t\uparrow$.PREV() $\leftarrow k_{(v)}$.LAST();

break;

else

$p \leftarrow k_{(v)}$.LAST();

$r \leftarrow p\uparrow$.PREV();

while ($(r \neq \mathbf{nil}) \wedge (\varphi_{p\uparrow}(\gamma_{p\uparrow, r\uparrow}) \leq \varphi_q(\gamma_{p\uparrow, r\uparrow}))$) **do**

$p \leftarrow r$;

```

        r ← r↑.PREV();
    end
    u ← new(p↑);
    u↑.NEXT() ← p↑.NEXT();
    if (u↑.NEXT() ≠ nil) then
        u↑.NEXT()↑.PREV() ← u;
    end
    p↑.NEXT() ← new(q);
    p↑.NEXT()↑.NEXT() ← t;
    if (t ≠ nil) then
        t↑.PREV() ← p↑.NEXT();
    end
    p↑.NEXT()↑.PREV() ← p;
    t ← u;
end
end
end
end

```

Время выполнения алгоритма — $O(M(v_0 + 1))$, где $M = b - a + 1$.

Данный алгоритм представляет собой обобщение алгоритма Грэхема.

Отметим, что в случае реализации списков с использованием динамической памяти следует производить освобождение выделенной динамической памяти.

Рассмотрим задачу построения ломаных — графиков функций $\varphi_{\min}^{(0)}(\gamma)$, $\varphi_{\min}^{(1)}(\gamma)$, ..., $\varphi_{\min}^{(v_0)}(\gamma)$.

Лемма 4'. Пусть

$$b > k_0^{(v)} > k_1^{(v)} > \dots > k_{s(v)-1}^{(v)} > k_{s(v)}^{(v)} = q + 1 > a,$$

$$s(v) \geq 1,$$

$$\gamma_l^{(v)} = \gamma_{k_{l-1}^{(v)}, k_l^{(v)}}, l = 1, \dots, s(v),$$

$$\forall l = 1, \dots, s(v) : \gamma_{l+1}^{(v)} \leq \gamma_l^{(v)},$$

$$\psi_{(v)}(\gamma) = \min_{q+1 \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma),$$

$$a) \quad \forall \gamma \in (-\infty, \gamma_{s(v)}^{(v)}] : \varphi_{q+1}(\gamma) \equiv \varphi_{k_{s(v)}^{(v)}}(\gamma) = \psi_{(v)}(\gamma),$$

$$б) \quad \forall l = 1, \dots, s(v) - 1 : \forall \gamma \in [\gamma_{l+1}^{(v)}, \gamma_l^{(v)}] : \varphi_{k_l^{(v)}}(\gamma) = \psi_{(v)}(\gamma),$$

$$в) \quad \forall \gamma \in [\gamma_1^{(v)}, +\infty) : \varphi_b(\gamma) \equiv \varphi_{k_0^{(v)}}(\gamma) = \psi_{(v)}(\gamma).$$

Пусть

$$\chi_{(v)}(\gamma) = \min_{q \leq r \leq b} \varphi_r(\gamma),$$

$$\gamma'_{(v)} = P(\psi_{(v)}, \varphi_q).$$

Тогда:

1) если $v < b - q$, то

$$a) \quad \forall \gamma \in (-\infty, \gamma'_{(v-1)}] : \psi_{(v-1)}(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma),$$

$$б) \quad \forall \gamma \in [\gamma'_{(v-1)}, \gamma'_{(v)}] : \varphi_q(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma),$$

$$в) \quad \forall \gamma \in [\gamma'_{(v)}, +\infty) : \psi_{(v)}(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma);$$

2) если $v = b - q$, то

$$a) \quad \forall \gamma \in (-\infty, \gamma'_{(v-1)}] : \psi_{(v-1)}(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma),$$

$$б) \quad \forall \gamma \in [\gamma'_{(v-1)}, +\infty) : \varphi_q(\gamma) = \chi_{(v)}(\gamma).$$

Приведём алгоритм.

Алгоритм б'.

$k_{(0)}.INSERT(b);$

$k_{(0)}.INSERT(b - 1);$

$k_{(1)}.INSERT(b - 1);$

$k_{(1)}.INSERT(b);$

for $q \leftarrow b - 2$ **downto** a **do**

$t \leftarrow \mathbf{nil};$

for $v \leftarrow 0$ **to** v_0 **do**

if ($v = b - q$) **then**

$k_{(v)}.INSERT(q);$

$k_{(v)}.LAST() \uparrow .NEXT() \leftarrow t;$

$t \uparrow .PREV() \leftarrow k_{(v)}.LAST();$

break;

else

$p \leftarrow k_{(v)}.LAST();$

$r \leftarrow p \uparrow .PREV();$

while $((r \neq \mathbf{nil}) \wedge (\varphi_{p \uparrow}(\gamma_{p \uparrow, r \uparrow}) \geq \varphi_q(\gamma_{p \uparrow, r \uparrow})))$ **do**

$p \leftarrow r;$

$r \leftarrow r \uparrow .PREV();$

end

$u \leftarrow \mathbf{new}(p \uparrow);$

$u \uparrow .NEXT() \leftarrow p \uparrow .NEXT();$

if ($u \uparrow .NEXT() \neq \mathbf{nil}$) **then**

$u \uparrow .NEXT() \uparrow .PREV() \leftarrow u;$

end

$p \uparrow .NEXT() \leftarrow \mathbf{new}(q);$

$p \uparrow .NEXT() \uparrow .NEXT() \leftarrow t;$

if ($t \neq \mathbf{nil}$) **then**

$t \uparrow .PREV() \leftarrow p \uparrow .NEXT();$

end

$p \uparrow .NEXT() \uparrow .PREV() \leftarrow p;$

$t \leftarrow u;$

end

end

end

Время выполнения алгоритма — $O(M(v_0 + 1))$, где $M = b - a + 1$.

Чтобы вычислить $\delta_{\min}(v_0, \infty)$, можно применить для ломаных $\varphi_{\max}^{(v)}(\gamma)$ и $\varphi_{\min}^{(v_0 - v)}(\gamma)$ ($v = 0, 1, \dots, v_0$) алгоритм, аналогичный алгоритму 4.

Замечание. В случае, когда $2v_0 \geq b - a + 1$, задача построения ломаных — графиков функций $\varphi_{\max}^{(0)}(\gamma), \varphi_{\max}^{(1)}(\gamma), \dots, \varphi_{\max}^{(v_0)}(\gamma)$ и $\varphi_{\min}^{(0)}(\gamma), \varphi_{\min}^{(1)}(\gamma), \dots, \varphi_{\min}^{(v_0)}(\gamma)$ — сводится к задаче построения ломаных — графиков функций $\varphi_{\max}^{(0)}(\gamma), \varphi_{\max}^{(1)}(\gamma), \dots, \varphi_{\max}^{(b-a)}(\gamma)$. В этом случае задача вычисления $\delta_{\min}(v_0, \infty)$ может быть решена за время $O(M^2)$, где $M = b - a + 1$.

2.12. Кубические сплайны класса C^2

Пусть на отрезке $[a, b]$ задано разбиение $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$. Обозначим $C^2[a, b]$ множество дважды непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций.

Определение. Функция $S(x)$ называется *кубическим сплайном дефекта 1* с узлами на сетке Δ , если

- а) на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ функция $S(x)$ является многочленом третьей степени, т. е.

$$S(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

для $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, N-1$;

- б) $S(x) \in C^2[a, b]$.

Пусть на отрезке $[a, b]$ в узлах сетки Δ заданы значения некоторой функции $f_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, N$.

Определение. *Интерполяционным кубическим сплайном дефекта 1* $S(f; x)$ называется сплайн, удовлетворяющий условиям

$$S(f; x_i) = f_i, \quad i = 0, 1, \dots, N. \quad (12)$$

Сплайн $S(f; x)$ на каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ определяется четырьмя коэффициентами, и поэтому для его построения на всём промежутке $[a, b]$ необходимо определить $4N$ коэффициентов. Условие $S(f; x) \in C^2[a, b]$ эквивалентно требованию непрерывности сплайна и его производных $S^{(r)}(x)$, $r = 0, 1, 2$, во всех внутренних узлах x_i , $i = 1, 2, \dots, N-1$, сетки Δ , что даёт $3(N-1)$ равенств. Таким образом, вместе с равенствами (12) получается $4N-2$ соотношений. Два дополнительных условия обычно задаются в виде ограничений на значения сплайна и его производных на концах промежутка $[a, b]$ (или вблизи концов) и называются *краевыми условиями*. Существует несколько различных видов краевых условий, из которых наиболее употребительными являются следующие типы [5]:

- I. $S'(f; a) = f'(a), S'(f; b) = f'(b)$.
- II. $S''(f; a) = f''(a), S''(f; b) = f''(b)$.
- III. $S^{(r)}(f; a) = S^{(r)}(f; b), r = 1, 2$.
- IV. $S'''(f; x_p + 0) = S'''(f; x_p - 0), p = 1, N-1$.

Теорема 9. Интерполяционный кубический сплайн $S(x)$, удовлетворяющий условиям (12) и одному из типов краевых условий I–IV, существует и единствен [5].

Рассмотрим задачу о минимизации функционала

$$J(f) = \int_a^b |f''(x)|^2 dx.$$

В качестве множества допустимых функций возьмём класс² $W_2^2[a, b]$.

Пусть в узлах сетки Δ заданы значения $z_i^0, i = 0, \dots, N$.

Теорема 10. Среди всех функций $f(x) \in W_2^2[a, b]$, интерполирующих значения z_i^0 , кубический сплайн $S(x)$ с краевыми условиями

$$S''(a) = S''(b) = 0$$

минимизирует функционал $J(f)$. Функция, дающая минимум, единственна [5].

2.13. Альтернативные методы

Функционал качества разбиения

Введём функционал качества разбиения при заданном числе классов.

Пусть κ — заданное число классов.

Пусть каждому промежутку $[a...b] \in T$ сопоставлено число $f_{a,b}$, характеризующее качество промежутка.

Например,

² $W_2^2[a, b]$ — класс функций, имеющих на $[a, b]$ абсолютно непрерывную производную порядка 1 и 2-ю производную из $L_2[a, b]$. $L_2[a, b]$ — пространство измеримых на $[a, b]$ функций $f(x)$, для которых функция $|f'(x)|^2$ интегрируема по Лебегу на $[a, b]$ [5].

$$f_{a,b} = \sum_{i=a}^b (y_i - (\alpha_{a,b}x_i + \beta_{a,b}))^2$$

или

$$f_{a,b} = \frac{1}{b-a+1} \sum_{i=a}^b (y_i - (\alpha_{a,b}x_i + \beta_{a,b}))^2,$$

где $\alpha_{a,b}, \beta_{a,b}$ — коэффициенты линейной регрессии на промежутке $[a...b]$.

Ещё один пример:

$$f_{a,b} = \delta_{\min}^{a,b}(0, \infty).$$

Тогда функционал качества разбиения можно построить следующим образом:

$$Q(S) = f_{m_0+1, m_1} + f_{m_1+1, m_2} + \dots + f_{m_{K-1}+1, m_K}.$$

Учтём также межкластерные характеристики. Пусть каждой паре промежутков $[a...k] \in T, [k+1...b] \in T$ сопоставлено число $g_{a,k,b}$, характеризующее разделённость между промежутками.

Функционал качества разбиения:

$$Q(S) = \sum_{i=1}^K f_{m_{i-1}+1, m_i} + \sum_{i=1}^{K-1} g_{m_{i-1}+1, m_i, m_{i+1}}.$$

Тогда наилучшим разбиением при заданном числе классов k будем считать разбиение S^* , на котором достигается минимум функционала $Q(S)$:

$$\min_{S:K=k} Q(S) = Q(S^*).$$

Отметим, что данный метод включает большинство методов, описанных в [6], как частные случаи.

Рассмотрим задачу нахождения наилучшего разбиения.

$a_{i,j,k}$ — минимум функционала качества при разбиении промежутка $[1...i]$ на k классов при условии, что последний кластер разбиения — $[j+1...i]$.

$$\begin{aligned} \min_{S:K=k} Q(S) &= \min_j a_{n,j,k}, \\ a_{i,j,k} &= \min_l (a_{j,l,k-1} + g_{l+1,j,i}) + f_{j+1,i}. \end{aligned}$$

Сплайн-функции

Ранговый метод кластеризации состоит в следующем. Если данные следует выделить в несколько кластеров, то способ разбиения можно сформулировать следующим образом: на каждом из кластеров справедлив модифицированный В. П. Масловым закон Ципфа со своими значениями параметров, которые меняются при переходе от кластера к кластеру. Функциональная зависимость

$$p \cong \alpha \left(\frac{N_p}{N_\infty - N_p} \right)^\gamma \quad (1)$$

наиболее чувствительна к выбору γ . Поэтому естественное разбиение должно быть таковым, что для каждого кластера существует своё числовое значение степенного параметра γ , характеризующее соответствующий кластер.

Проведём через точки $\{(\ln R_r, \ln w_r)\}_{r=1}^n$ интерполяционный кубический сплайн $S(x)$. Проанализируем график производной этого сплайна $S'(x)$. На тех участках отрезка $[a, b]$, на которых $S'(x)$ мало изменяется, выделим кластеры. Резкое изменение $S'(x)$ означает переход от кластера к кластеру.

Основным параметром является γ . Этот параметр характеризует угловой коэффициент прямой, аппроксимирующей точки кластера. Если мы проведём через точки сплайн $S(x)$, то роль параметра, характеризующего наклон, будет играть производная сплайна $S'(x)$. Здесь важным является свойство минимальности значения функционала

$$J(f) = \int_a^b |f''(x)|^2 dx.$$

Замечание. Описанный метод напоминает метод наименьших квадратов.

Заключение

Таким образом, в процессе выполнения курсовой работы нами было сделано:

- рассмотрена задача вычисления $\delta_{\min}(0, \infty)$ как задача нахождения многочлена наилучшего равномерного приближения;
- рассмотрена задача вычисления $\delta_{\min}(0, \infty)$ с точки зрения проектирования точек;
- рассмотрены алгоритмы нахождения ломаной — графика максимума линейных функций — и показано, что эти алгоритмы представляют собой алгоритмы построения выпуклой оболочки;
- рассмотрена задача вычисления $\delta_{\min}(v_0, \infty)$, получено обобщение алгоритма Грэхема;
- рассмотрены альтернативные методы: метод, использующий функционал качества разбиения, и метод, использующий сплайн-функции.

Автор благодарит М. А. Гузеву, Е. А. Нурминского, А. С. Кленина за ценные советы и замечания.

Список литературы

- [1] Айвазян С. А., Бухштабер В. М., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности: Справ. изд. / Под ред. С. А. Айвазяна. — М.: Финансы и статистика, 1989. — 607 с.
- [2] Гренкин Г. В. Кластеризация эмпирических данных ранговым методом. Курсовая работа. — Владивосток, 2010. URL: <http://imcs.dvgu.ru/works/work?wid=13420>
- [3] Гузев М. А., Черныш Е. В. Ранговый анализ в задачах кластеризации. // Информатика и системы управления. 2009. №3(21). — Благовещенск: Изд-во Амурского гос. ун-та. С. 13–19.
URL: http://www.khstu.ru/rus/ics/ics_pdf/N21_02.pdf
- [4] Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н. Введение в минимакс. — М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972. — 368 с.
- [5] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В. Л. Методы сплайн-функций. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
- [6] Зеленов А. С. Критериальная кластеризация квазиодномерных данных. Дипломная работа. — Владивосток, 2008.
URL: <http://imcs.dvgu.ru/works/work?wid=4523>
- [7] Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. Часть I: Учеб.: Для вузов. — 7-е изд., стер. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. — 648 с.
- [8] Кленин А. С. Методические указания по подготовке и защите отчётов на специализации «Прикладная математика. Системное программирование» (версия 1.0 от 17.06.2009). — Владивосток, 2002–2009.
URL: <http://imcs.dvgu.ru/lib/repplan/RepPlan.7z>
- [9] Колобов А. Г. Сплайн-функции. Методическое пособие. — Владивосток, ДВГУ, 1999.
- [10] Маслов В. П. Квантовая экономика. — 2-е изд., доп. — М.: Наука, 2006. — 92 с.
- [11] Пак Г. К. Дискретная математика. Учеб. пособие. — Находка: Институт технологии и бизнеса, 2001. — 109 с.
- [12] Пак Г. К. Лекции по алгебре. Матрицы. — Владивосток, 2007.
- [13] Пак Г. К. Лекции по аналитической геометрии. — Владивосток, 2005.

- [14] Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение: Пер. с англ. — М.: Мир, 1989. — 478 с.
- [15] Равномерное приближение функций полиномами.
URL: http://www.cde.spbstu.ru/Num_Met/Interpol/ripl_pol.html
- [16] Чурсин Н. Н. Популярная информатика. — НиТ. Раритетные издания, 1998 (Текст издания: К.: «Техника», 1982). URL: <http://n-t.ru/ri/ch/pi.htm>
- [17] Al-Dabbagh M. Curve-fitting to discrete data. Web Research (published 2009). URL: <http://cf.net16.net>
- [18] Low A. L_∞ regression and mixture index of fit.
URL: <http://www.math.uni-klu.ac.at/stat/Tagungen/Ossiach/Low.pdf>
- [19] Min-max polynomial. URL:
<http://images.thelasthealing.multiply.multiplycontent.com/attachment/0/SoqOIAoKCEEAAG0DR5A1/math%2520174%2520MINMAX%2520POLYNOMIAL.pdf>
- [20] Tawfik S. A. Minimax approximation and Remez algorithm. July 24, 2005. URL: http://www.math.unipd.it/~alvise/CS_2008/APPROSSIMAZIONE_2009/MFILES/Remez.pdf
- [21] Thron C. Line-fitting algorithms for exceptional cases — minimax line fitting.
URL: <http://advancedtrading.com/articles/225200615>

Приложения

Приложение А. Применение рангового метода кластеризации для анализа результатов всероссийской олимпиады школьников по информатике

Ранговый метод кластеризации был применён для анализа результатов всероссийской олимпиады школьников по информатике, 2007 г.

По итогам олимпиады все участники упорядочиваются по убыванию набранных ими баллов, и затем жюри выявляет победителей и призёров. По правилам олимпиады дипломы получают не менее 45% всех участников, при этом участники получают дипломы I, II и III степени согласно пропорции 1:2:3.

Применим ранговый метод кластеризации. Участники олимпиады упорядочиваются, но уже по убыванию количества набранных баллов w , и каждому значению w ставится в соответствие порядковый номер — ранг r (т. е. участнику, занявшему последнее место, соответствует ранг 1). Для каждого участника вычисляется значение ранговой переменной

$R = \frac{N - r}{r}$, где $N = n + 1$ (n — количество участников олимпиады). Данные рассматриваются

в логарифмических координатах $(\ln R, \ln w)$ (см. рис. ПЗ). На рисунке по оси абсцисс отложена координата $\ln R$, по оси ординат — координата $\ln w$.

На рисунке красным цветом выделены участники, получившие диплом I степени, синим цветом — участники, получившие диплом II степени, зелёным цветом — участники, получившие диплом III степени, фиолетовым цветом — участники, не получившие диплома. Таким образом, жюри производит «разбиение на кластеры».

Проанализируем это разбиение с помощью соотношения

$$\ln w \cong -\gamma \ln R + c.$$

На рисунке видно, что на каждом из кластеров справедливо данное соотношение: точки каждого цвета (кроме фиолетового) практически лежат на одной прямой, — причём значения параметров меняются при переходе от кластера к кластеру, т. е. данное разбиение удовлетворяет условиям естественного разбиения в ранговом методе кластеризации, а распределение дипломов между участниками является, с точки зрения рангового метода кластеризации, как бы естественным. На рисунке также можно выделить кластер, включающий участников, занявших 1–3 места. Отметим, что $\gamma_I < \gamma_{II} < \gamma_{III}$. Интересно, какой «физический» смысл имеет значение параметра γ ? Возможно, параметр γ характеризует соотношение между уровнем подготовки участников и уровнем сложности задач.

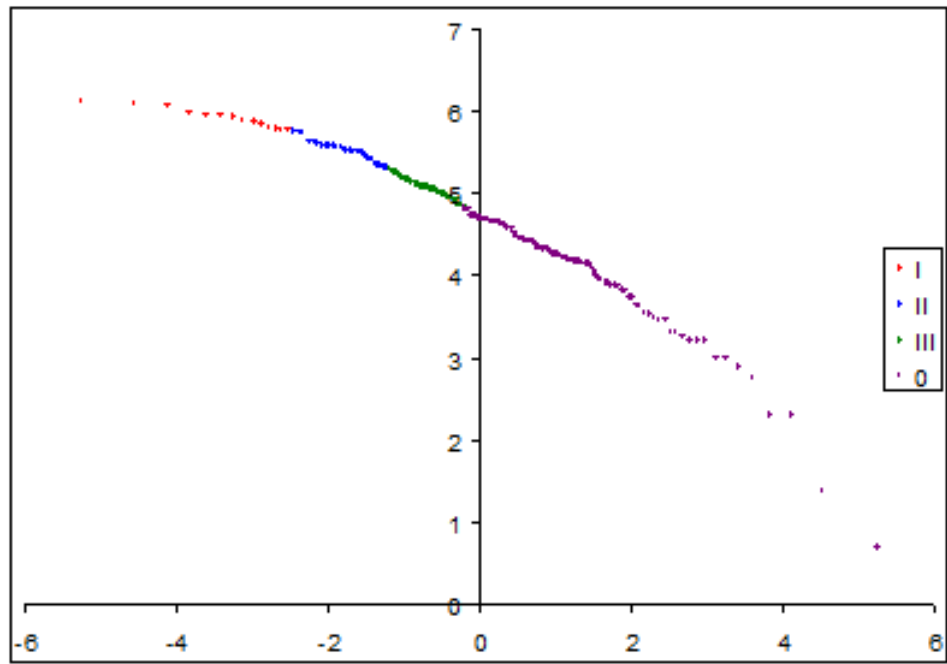


Рис. ПЗ. Результаты всероссийской олимпиады по информатике, 2007 г.